Corso di Metodi Numerici per le Equazioni alle Derivate Parziali

Docente E. Carlini

Foglio di esercizi n. 1
Problemi Trasporto in dimensione uno e due

1. Si consideri l'equazione del trasporto nel dominio $\Omega \subset \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_t(x,t) + c(x,t)u_x(x,t) = 0 & \text{in } \Omega \times [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) & x \text{ in } \Omega \end{cases}$$

con condizioni al bordo periodiche o con condizioni assegnate sulla frontiera inflow.

Il programma va strutturato in funzioni. Il campo velocità, il dato iniziale u_0, l'orizzonte temporale, il passo spaziale Δx (uniforme in x) ed il passo temporale Δt vanno scelti tramite un menù.
È consigliato che il programma proponga, dopo aver acquisito Δx e $c(x,t)$, un valore per Δt che verifichi la condizione di stabilità CFL.

(a) Si approssimi la soluzione con i metodi up-wind, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff.

(b) Si verifichi gli errori di convergenza dei metodi tramite l'andamento dell'errore nella norma L_∞ discreta al variare di Δx, quando la soluzione analitica del problema è nota,

Si consideri, ad esempio $\Omega = [-1,3]$, dati iniziali

$$u(x,0) = \begin{cases} \sin(2\pi x) & -1 \le x \le 1 \\ 0 & 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

e

$$u(x,0) = \begin{cases} \sin(4\pi x) & -1 \le x \le 0 \\ 0 & 0 \le x \le 3 \end{cases}$$

con condizioni periodiche.
Si consideri $\Omega = [0,7]$; velocità positiva e

$$u(x,0) = 0$$

con condizione al bordo inflow $u(0,t) = \sin(t)$.

2. Si consideri l'equazione del trasporto nel dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) + c(x,y)Du(x,y,t) = 0 & \text{in } \Omega \times [0,T] \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Per verificare la condizione di stabilità CFL è consigliato che il programma proponga, dopo aver acquisito il valore Δx e $c(x,y)$, un valore per Δt.
Si approssimi la soluzione con i metodi up-wind, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff con condizioni al bordo periodiche o condizioni Dirichlet sul bordo inflow(nel caso di velocità costante).
Si verifichi gli errori di convergenza dei metodi tramite l'andamento dell'errore nella norma L_∞ discreta al variare di h, quando la soluzione analitica del problema è nota. Ecco alcuni esempi su cui testare il programma:

(a) $c(x, y) = (a, b)$ con a, b valori scalari constanti

(b) $c(x, y) = (x, 1)$

(c) $c(x, y) = (-1, y)$

(d) $c(x, y) = (y, -x)$

(e) $u_0(x, y) = \sin(x)\cos(y)$

(f) $u_0(x, y) = \max(0.5 - x^2 - y^2, 0)$

(g) $u_0(x, y) = \max(1 - |x - 0.5| - |y - 0.5|, 0)$

(h) $u_0(x, y) = \max(0.25 - (x - 0.25)^2 - (y - 0.25)^2, 0)$