Corso di Metodi Numerici per le Equazioni alle Derivate Parziali
A.A. 2013-14

Docente E. Carlini

Foglio di esercizi n. 1
Problemi iperbolici

1. Si consideri l'equazione del trasporto in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $u_t + a\, u_x = f(x)$ con dato iniziale $u(x,0) = 0$, $a > 0$ ed
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Mostrare, usando la formula di rappresentazione, che la soluzione è data da
$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{s } x \leq 0 \\ \frac{x}{a} & \text{se } x \geq 0 \text{ e } x - at \leq 0 \\ t & \text{se } x \geq 0 \text{ e } x - at \geq 0. \end{cases}$$

2. Si consideri l'equazione del trasporto $u_t + \ u_x = 0$ su $\mathbb{R} \times (0,T)$, $a > 0$, con dato iniziale
$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \leq 1/4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
   (a) scrivere la formula di rappresentazione della soluzione esatta e provare che verifica il problema in senso debole. (*Suggerimento: nella formulazione debole, si spezzi l'integrale rispetto a x del termine relativo alla u_t in due parti: $x \in (-\infty, 1/4)$ e $x \in (1/4, \infty)$*)
   (b) scrivere le formule di rappresentazione delle soluzioni esatte calcolate ora sul dominio $(x,t) \in (0,1) \times (0,T)$ con condizione nel bordo inflow rispettivamente pari a $u(0,t) = 0$ e $u(0,t) = 1$.

3. Si consideri la seguente approssimazione della derivata seconda mista di $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:
$$u_{x,y}(x,y) \approx \frac{1}{4h^2}\left(u(x+h, y+h) - u(x-h, y+h) + u(x-h, y-h) - u(x+h, y-h)\right).$$
Supponendo che $u \in C^4(\mathbb{R}^2)$, si dimostri che l'approssimazione è accurata con ordine 2, rispetto h.

4. Si dimostri che il metodo di Lax-Friedrichs in dimensione 2 è consistente con errore di troncamento dell'ordine di $O(\Delta t + h^2 + \frac{h^2}{\Delta t})$. (Dove h indica il parametro di discretizzazione in x e in y).

5. Calcolare il coefficiente di amplificazione del metodo di Lax-Wendroff e dimostrare che è L_2 stabile sotto la condizione CFL.

6. Dimostrare che il metodo di Lax-Friedrichs è L_∞ stabile sotto la condizione CFL.