FUNZIONI 2.

Esercizio 1 *Per $x \neq 0$ determinare il gradiente e la matrice Hessiana di $f(x) = g(|x|)$ dove g è una funzione due volte derivabile. Determinare gli autovalori e gli autovettori di $D^2 f(x)$. (Si ricorda che fissato $x \in \mathbb{R}^n$ non nullo, lo spazio ortogonale a x ha dimensione $n-1$.)*

Esercizio 2 *Determinare lo sviluppo di Taylor del secondo ordine delle seguenti funzioni definite in $\mathbb{R}^n$*

- $f(x) = \sqrt{|x|+1}$ *in* $x = 0$
- $f(x) = e^{\langle x,a \rangle}$ *con* $a \in \mathbb{R}^n$ *in* $x = 0$.

Esercizio 3 *Siano f e g due funzioni convesse in A aperto convesso di $\mathbb{R}^n$.*

Determinare se sono convesse le seguenti funzioni. Se non lo sono determinare se esistono delle ipotesi aggiuntive che le rendano tali

- *Per* $a \in \mathbb{R}$ *e* $b \in \mathbb{R}$ $h(\cdot) = af(\cdot) + bg(\cdot)$
- $h(x) = f(Mx)$ *dove* M *è una matrice costante* $n \times n$
- $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$

Esercizio 4 *Determinare per quali $\alpha \geq 0$, $f(x) = |x|^\alpha$ è convesso in $\mathbb{R}^n$*

Esercizio 5 *Data f funzione continua in A aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia*

$$J^{1,-}f(x) = \{p \in \mathbb{R}^n;\ f(y) \geq f(x) + \langle p, (y-x) \rangle + o(|y-x|)\}.$$

1. *Dimostrare che se f è differenziabile in x_o allora $J^{1,-}f(x_o) = \{\nabla f(x_o)\}$.*
2. *Per $f_1(x) = |x|$ e $f_2(x) = -|x|$ determinare $J^{1,-}f_1(x)$ e $J^{1,-}f_2(x)$.*

Esercizio 6 *Una $f : A \to \mathbb{R}$ dove A è un aperto di $\mathbb{R}^2$ è armonica in A se $f \in C^(\mathbb{R}^2)$ e $f_xx(x,y) + f_yy(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \in A$. Esistono funzioni armoniche convesse su A [rispettivamente, strettamente convesse] ?*

Esercizio 7

- *dimostrare che se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è differenziabile con $||\nabla f(x)|| \leq L < +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ allora f è Lipschitziana su $\mathbb{R}^n$, cioè*

$$|f(x) - f(y)| \leq L||x-y|| \quad \textit{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

- *indicare quali tra le seguenti funzioni non sono Lipschitziane su $\mathbb{R}^n$:*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad f(x,y) = x^2 - y^2 \qquad f(x,y) = xe^y$$

- *esistono funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tali che*

$$|f(x) - f(y)| \leq L||x-y||^2 \quad \textit{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}^n \text{ ?}$$

Esercizio 8 *Quali tra le seguenti funzioni sono radiali, quali omogenee, quali convesse ?*

- $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y}$ $\qquad f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ $\qquad f(x,y) = \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$ $\qquad f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$
- $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ $\qquad f(x,y) = \frac{x-y}{x^2-y^2}$ $\qquad f(x,y,z) = \frac{xz}{y+z}$
- $f(x,y,z) = \frac{xz}{y+z}$ $\qquad f(x,y,z) = \log(1+e^{x+y+z})$ $\qquad f(x,y,z) = x^{y\log z}$
- $f(x,y,z) = \log(x^+y^2+z^2)$ $\qquad f(x,y,z) = \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}$ $\qquad f(x,y) = 3(1-x/2-y/4)$
- $f(x,y) = xy$ $\qquad f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ $\qquad f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$ $\qquad f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$
- $f(x,y) = x^2+y^2$ $\qquad f(x,y) = x^2-y^2$ $\qquad f(x,y) = xe^{-y}$ $\qquad f(x,y) = \arccos\frac{<x,y>}{||x||\,||y||}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$

Esercizio 9 Matrici semidefinite positive

Sia M^n l'insieme della matrici A di tipo $n \times n$ ad entrate reali a_{ij} identificato in modo naturale con $\mathbb{R}^{n^2}$.

Una matrice $A \in M^n$ è **semidefinita positiva** *e si scrive $A \geq 0$ se $< Ax, x > \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.*

- *verificare che l'insieme $C = \{A \in M^n : A \geq 0\}$ è un cono di vertice 0 in $\mathbb{R}^{n^2}$*
- *dimostrare che la funzione $\det : C \to \mathbb{R}$ è positivamente omogenea*
- *per $n = 2$ e $A \in M^2$, calcolare $\nabla \det(A)$ e $\nabla^2 \det(A)$*
- *analizzare i punti critici su M^2 della funzione $A \to \det(A)$*
- *è vera la disuguaglianza $\det(A) \leq \left(\frac{\mathrm{tr}(A)}{n}\right)^n$?*

- *è vero che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha*

$$| < Ax, y > | \leq < Ax, x >^{\frac{1}{2}} < Ay, y >^{\frac{1}{2}} \quad ?$$

Esercizio 10 Due disuguaglianze di convessità

• **disuguaglianza di Cauchy parametrica**: *dimostrare che per ogni $\epsilon > 0$ si ha*

$$\inf_{(x,y) \in A} (\epsilon x^2 + \frac{y^2}{4\epsilon} - xy) = 0$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$

• **disuguaglianza di Young** : *dimostrare che*

$$\inf_{(x,y) \in A} \Big(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy \Big) = 0$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ dove $p, q \in (1, +\infty)$ con $1/p + 1/q = 1$

[scrivere $xy = e^{\log x + \log y}$ e usare la convessità della funzione $t \to e^t$]

• **disuguaglianza di Jensen**: *dimostrare che se $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa allora*

$$\phi\Big(\frac{1}{n} \sum_1^n x_i \Big) \leq \frac{\sum_1^n \phi(x_i)}{n}$$