FUNZIONI.3

Esercizio 1 • *dimostrare che se* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *è differenziabile con* $||\nabla f(x)|| \le L < +\infty$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$ *allora* f *è Lipschitziana su* $\mathbb{R}^n$*, cioè*

$$|f(x) - f(y)| \le L||x - y|| \quad \textit{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

- *indicare quali tra le seguenti funzioni non sono Lipschitziane su* $\mathbb{R}^n$*:*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad f(x,y) = x^2 - y^2 \qquad f(x,y) = xe^y$$

- *esistono funzioni* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tali che*

$$|f(x) - f(y)| \le L||x - y||^2 \quad \textit{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}^n \text{ ?}$$

Esercizio 2 *Quali tra le seguenti funzioni sono radiali, quali omogenee, quali convesse ?*

- $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y}$ $\qquad f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ $\qquad f(x,y) = \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$ $\qquad f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$
- $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ $\qquad f(x,y) = \frac{x-y}{x^2-y^2}$ $\qquad f(x,y,z) = \frac{xz}{y+z}$
- $f(x,y,z) = \frac{xz}{y+z}$ $\qquad f(x,y,z) = \log(1 + e^{x+y+z})$ $\qquad f(x,y,z) = x^{y \log z}$
- $f(x,y,z) = \log(x^+ y^2 + z^2)$ $\qquad f(x,y,z) = \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}$ $\qquad f(x,y) = 3(1 - x/2 - y/4)$
- $f(x,y) = xy$ $\qquad f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ $\qquad f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ $\qquad f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
- $f(x,y) = x^2+y^2$ $\qquad f(x,y) = x^2-y^2$ $\qquad f(x,y) = xe^{-y}$ $\qquad f(x,y) = \arccos \frac{<x,y>}{||x||\,||y||}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$

Esercizio 3 *Sia* $f : R^n \to \mathbb{R}$ *una funzione differenziabile due volte e* $\varphi : \mathbb{R} \to \ R$ *una funzione derivabile due volte:*

- *calcolare la matrice Hessiana della funzione composta* $\varphi \circ f$
- *dimostrare che se* f *è convessa e* φ *è crescente allora* $\varphi \circ f$ *convessa.*