CURVE

Esercizio 1

- *Sia* $C = r(I)$ *una curva continua in* $\mathbb{R}^2$. *Dimostrare che se* I *è un intervallo chiuso e limitato allora* C *è un insieme limitato di* $\mathbb{R}^2$*;*
- *Dare esempi di curve parametrizzate da intervalli* I *illimitati e contenute in un insieme limitato;*
- *Sia* $C = r([0, 2\pi])$ *con* $r(t) = (\cos t\,,\, e^{-t^2})$*; dimostrare che* C *è contenuta nel rettangolo* $R = [-1, 1] \times [0, 1]$ *e determinare i punti di* C *più lontani dall'origine.*

Esercizio 2 *Si denota con* $L(C)$ *la lunghezza di una curva* C.

- *Considerare per* $m \geq 0$ *la famiglia* (C_m) *di segmenti di retta definiti dalla parametrizzazione*

$$r(t) = (t, m\,t) \quad , \quad t \in [0, 1]$$

Calcolare $L(C_m)$ *per ogni* $m \geq 0$ *e poi* $\inf\{L(C_m); m \geq 0\}$ *e* $\sup\{L(C_m); m \geq 0\}$.

Esercizio 3 *Considerare il grafico della gaussiana* e^{-t^2} *sull'intervallo* $[-1, 1]$.
Dimostrare che la sua lunghezza L *verifica*

$$2 \leq L \leq \sqrt{20}$$

Esercizio 4 *Calcolare la lunghezza della curva parametrica*

$$r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t) \quad , \quad t \in [0, 2]$$

Esercizio 5 *Siano* C *e* C^* *curve parametrizzate rispettivamente da* r *e* r^* *su* $[0, 1]$.
Discutere la validità della seguente affermazione: per ogni $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che*

$$\max_{t \in [0,1]} ||r(t) - r^*(t)|| \leq \delta$$

implica

$$|L(C) - L(C^*)| \leq \varepsilon$$

.