

FUNZIONI 0.

Esercizio 1 Per le seguenti funzioni delle 2 variabili (x, y) calcolare i limiti indicati o spiegare perchè non esistono:

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{y}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$

Esercizio 2 Calcolare, dove è ben definito, il gradiente delle seguenti funzioni delle 3 variabili (x, y, z) :

- $f(x, y, z) = \frac{xz}{y+z}$
- $f(x, y, z) = \log(1 + e^{x+y+z})$
- $f(x, y, z) = x^{y \log z}$
- $f(x, y, z) = \log(x^+y^2 + z^2)$
- $f(x, y, z) = \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}$

Esercizio 3 Calcolare il gradiente e disegnare gli insiemi di livello delle seguenti funzioni delle 2 variabili (x, y) :

- $f(x, y) = 3(1 - x/2 - y/4)$
- $f(x, y) = xy$
- $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$
- $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $f(x, y) = x^2 - y^2$
- $f(x, y) = xe^{-y}$

Esercizio 4 Per ciascuna delle seguenti funzioni determinarne l'insieme di definizione e studiarne limitatezza, continuità, derivabilità e differenziabilità

- $f(x_1, x_2) = e^{(x_1+x_2)}\sqrt{x_1x_2}$
- $f(x, y) = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$
-

Esercizio 5 Considerare le seguenti funzioni:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1x_2}{\max\{x_1, x_2\}} & \text{se } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

$$g(x) = |x|^p + \frac{1}{|x|^p}, \quad p \geq 2 \quad \text{definita su } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$h(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_2 \sin x_1}{x_1^2 + 3x_2^2} & \text{se } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

- studiare limitatezza, continuità, derivabilità e differenziabilità di f , g e h
- determinare l'insieme di livello $\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x_1, x_2) = 1\}$
- dimostrare che gli insiemi di livello di g sono chiusi e limitati