S. CAPRARA - ESERCIZI DI FISICA GENERALE II - FOGLIO No 3

I. CIRCUITI OHMICI. CIRCUITI RC SERIE. CAMPO MAGNETICO.

ES. 1 Si risolva il circuito ohmico mostrato in Figura 1(a), determinando il valore della corrente che scorre in ciascuna resistenza, in funzione dei valori delle resistenze e delle forze elettromotrici.
ES. 2 Si risolva il circuito ohmico mostrato in Figura 1(b), determinando il valore della corrente che scorre in ciascuna resistenza, in funzione dei valori delle resistenze e delle forze elettromotrici.

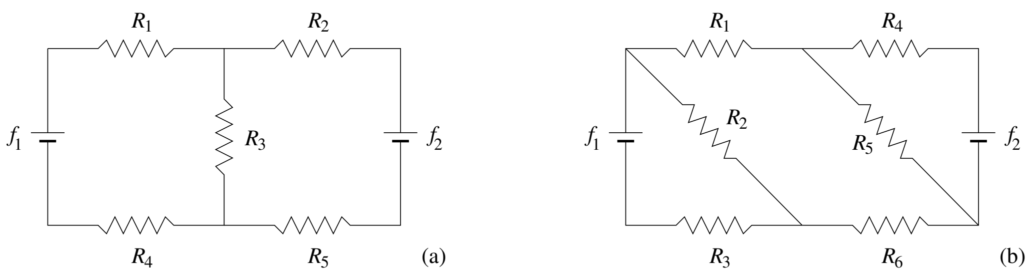

Figura 1.

ES. 3 Si dimostri che la potenza dissipata per effetto Joule nella serie di due resistenze R_1 e R_2 è uguale alla potenza dissipata nella resistenza equivalente $R = R_1 + R_2$.
ES. 4 Si dimostri che la potenza dissipata per effetto Joule nel parallelo di due resistenze R_1 e R_2 è uguale alla potenza dissipata nella resistenza equivalente $R = R_1 R_2/(R_1 + R_2)$.
ES. 5 $\Box$ Due sfere conduttrici, di raggio rispettivamente R_1 e R_2, poste a distanza molto grande (di modo da poter trascurare la mutua induzione elettrostatica), hanno inizialmente carica Q_1 e Q_2. Ad un certo istante $t = 0$, le due sfere vengono collegate tramite un filo conduttore di resistenza R. Si determini, in funzione del tempo t, la corrente i che scorre nel filo, scegliendo come verso di riferimento per la corrente quello che va dalla sfera di raggo R_1 alla sfera di raggio R_2. Si determinino le cariche $\overline{Q}_1$ e $\overline{Q}_2$ presenti sulle due sfere nello stato stazionario asintotico (per $t \to +\infty$).
ES. 6 Si consideri un circuito RC serie in cui è presente un generatore ideale di f.e.m. f. All'istante $t = 0$ viene chiuso l'interruttore e nel circuito comincia a circolare corrente. Il condensatore è inizialmente scarico. Si determinino in funzione del tempo t la d.d.p. V_R ai capi della resistenza R e la d.d.p. V_C ai capi della capacità C.
ES. 7 $\Box$ Si consideri un circuito RC serie in cui è presente un generatore ideale di f.e.m. f. All'istante $t = 0$ viene chiuso l'interruttore e nel circuito comincia a circolare corrente. Il condensatore è inizialmente scarico. Si determini l'energia dissipata nella resistenza R per effetto Joule durante tutto il processo di carica del condensatore. Si calcoli l'efficienza η del processo di carica del condensatore, definita come rapporto tra l'energia immagazzinata nel condensatore e l'energia complessivamente erogata dal generatore.
ES. 8 Si consideri un circuito RC serie in cui sul condensatore di capacità C è inizialmente presente la carica Q_0. All'istante $t = 0$ il condensatore viene chiuso sulla resistenza. Si calcoli l'energia dissipata nella resistenza R per effetto Joule durante tutto il processo di scarica del condensatore.
ES. 9 Si determini in ogni punto dello spazio il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ generato da una distribuzione di correnti a simmetria cilindrica, sapendo che la densità di corrente $\mathbf{J}$ è costante in ogni punto di un cilindro indefinito di raggio R, e parallela all'asse dell cilindro, ed è nulla all'esterno del cilindro.
ES. 10 $\Box$ Si determini in ogni punto dello spazio il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ generato da una distribuzione di correnti confinata dentro un guscio cilindrico indefinito di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2, sapendo che la densità di corrente $\mathbf{J}$ è costante in ogni punto del guscio cilindrico e parallela al suo asse, ed è nulla all'esterno del guscio cilindrico.
ES. 11 Si determini in ogni punto dello spazio il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ generato da una distribuzione di correnti confinata dentro un cilindro indefinito di raggio R, sapendo che la densità di corrente $\mathbf{J}(r) = \mathbf{J}_0 r$, per $r \leq R$, e $\mathbf{J}(r) = 0$, per $r > R$, è parallela all'asse del cilindro e dipende soltanto dalla distanza r dall'asse ($\mathbf{J}_0$ è un vettore costante parallelo all'asse del cilindro).
ES. 12 Si determini in ogni punto dello spazio il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ generato da una distribuzione di correnti confinata dentro un cilindro indefinito di raggio R, sapendo che la densità di corrente $\mathbf{J}(r) = \mathbf{J}_0 r(R - r)$, per $r \leq R$, e $\mathbf{J}(r) = 0$, per $r > R$, è parallela all'asse del cilindro e dipende soltanto dalla distanza r dall'asse ($\mathbf{J}_0$ è un vettore costante parallelo all'asse del cilindro).

ES. 13 Si determini in ogni punto dello spazio il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ generato da un conduttore a forma di guscio cilindrico indefinito di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2, percorso da corrente, sapendo che la densità di corrente $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 r$, per $R_1 \leq r \leq R_2$, e $\mathbf{J}(r) = 0$, per $0 \leq r < R_1$ e $r > R_2$, è parallela all'asse del conduttore e dipende soltanto dalla distanza r dall'asse ($\mathbf{J}_0$ è un vettore costante parallelo all'asse del conduttore).
ES. 14 Si determini in ogni punto dello spazio il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ generato da una distribuzione di correnti confinata dentro un guscio cilindrico indefinito di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2, sapendo che la densità di corrente $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0(R_2 - r)(r - R_1)$, per $R_1 \leq r \leq R_2$, e $\mathbf{J}(r) = 0$, per $0 \leq r < R_1$ e $r > R_2$, è parallela all'asse del guscio cilindrico e dipende soltanto dalla distanza r dall'asse ($\mathbf{J}_0$ è un vettore costante parallelo all'asse del guscio cilindrico).
ES. 15 Si consideri una distribuzione di correnti confinata dentro un cilindro indefinito di raggio R in cui è presente una cavità cilindrica con asse parallelo all'asse del del primo cilindro e raggio $a < R/2$. La distanza tra l'asse del cilindro e l'asse della cavità è $d = R/2$. All'interno del cilindro la densità di corrente $\mathbf{J}$ è costante in ogni punto e parallela all'asse del cilindro. Nella cavità e nello spazio esterno al cilindro la densità corrente è nulla. Si determini il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ in un punto qualunque sull'asse della cavità. Si determini il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ in un punto qualunque sull'asse del cilindro.
ES. 16* Si dimostri che $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$, partendo dalla relazione che lega il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ alla densità di corrente $\mathbf{J}$,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathcal{V},$$

dove $\mathcal{V}$ è il volume occupato dai conduttori, il vettore $\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}$ individua la posizione del punto nel quale si calcola il campo, $\mathbf{r}' = x'\,\hat{\mathbf{i}} + y'\,\hat{\mathbf{j}} + z'\,\hat{\mathbf{k}}$ è il vettore che individua il punto variabile nel volume $\mathcal{V}$, e $d\mathcal{V} = dx'dy'dz'$. Per la dimostrazione, si utilizzino le seguenti due proprietà della densità di corrente $\mathbf{J}$:
(i) $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0$ (equazione di continuità in regime stazionario);
(ii) $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale alla superficie dei conduttori (la corrente non attraversa la superficie dei conduttori).
ES. 17* Si consideri il potenziale vettore

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathcal{V},$$

dove $\mathbf{J}$ è la densità di corrente, $\mathcal{V}$ è il volume occupato dai conduttori, il vettore $\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}$ individua la posizione del punto nel quale si calcola il potenziale vettore $\mathbf{A}$, $\mathbf{r}' = x'\,\hat{\mathbf{i}} + y'\,\hat{\mathbf{j}} + z'\,\hat{\mathbf{k}}$ è il vettore che individua il punto variabile nel volume $\mathcal{V}$, e $d\mathcal{V} = dx'dy'dz'$. Si dimostri che $\vec{\nabla} \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$.
ES. 18* Si dimostri che il potenziale vettore $\mathbf{A}$ definito nell'esercizio precedente è tale che $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$. Per la dimostrazione, si usino le stesse proprietà della densità di corrente $\mathbf{J}$ indicate nella traccia dell'ES. 16.
ES. 19 Si consideri il potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -By\,\hat{\mathbf{i}} + Bx\,\hat{\mathbf{j}}$, dove B è una costante e $\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}$. Si verifichi che $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$. Si determini il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ associato al potenziale vettore considerato.
ES. 20 Si consideri il potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (Cx - By)\,\hat{\mathbf{i}} + (Cy + Bx)\,\hat{\mathbf{j}} + Cz\,\hat{\mathbf{k}}$, dove B e C sono costanti e $\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}}$. Si verifichi che $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} \neq 0$. Si determini il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ associato al potenziale vettore considerato. Si dimostri che il potenziale vettore considerato differisce dal potenziale vettore dell'ES. 19 per il gradiente di una funzione $f(x, y, z)$. Si determini, a meno di una costante arbitraria, tale funzione. Si verifichi che $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = \nabla^2 f$.
ES. 21* Si consideri il potenziale vettore $\mathbf{A}(x, y, z) = A(r)\,\hat{\mathbf{k}}$, dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ è la coordinata radiale cilindrica, $A(r)$ è una funzione scalare derivabile rispetto al suo argomento, e $\hat{\mathbf{k}}$ è il versore dell'asse z. Si verifichi che $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$. Si determini il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ associato al potenziale vettore considerato. [Si osservi che in coordinate cilindriche $r\,\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = -y\,\hat{\mathbf{i}} + x\,\hat{\mathbf{j}}$, dove $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ è il versore associato alla coordinata cilindrica angolare ϑ].
ES. 22* Si usi il risultato dell'ES. 21 per determinare in tutto lo spazio il potenziale vettore $\mathbf{A}$ generato da un filo rettilineo infinito percorso dalla corrente i, con la condizione che $\mathbf{A}$ si annulli a distanza d dal filo. (Si assuma che la corrente scorre nel verso positivo dell'asse z).
ES. 23* Si usi il risultato dell'ES. 21 per determinare in tutto lo spazio il potenziale vettore $\mathbf{A}$ generato dalla distribuzione di corrente considerata nell'ES. 9, con la condizione che $\mathbf{A}$ si annulli sulla superficie del conduttore cilindrico, per $r = R$. (Si assuma come asse z l'asse del cilindro).
ES. 24* Si usi il risultato dell'ES. 21 per determinare in tutto lo spazio il potenziale vettore $\mathbf{A}$ generato dalla distribuzione di corrente considerata nell'ES. 10, con la condizione che $\mathbf{A}$ si annulli sulla superficie esterna del guscio cilindrico, per $r = R_2$. (Si assuma come asse z l'asse del guscio cilindrico).