

COGNOME ..... NOME .....

Una disco omogeneo di centro  $C$ , massa  $M$  e raggio  $R$  si muove in un piano verticale con un suo punto  $A$ , posto a distanza  $R/2$  dal centro, vincolato a scorrere senza attrito sull'asse orizzontale  $x$  di un sistema di coordinate ortogonali  $Oxy$ , con asse  $y$  verticale orientato verso l'alto. Il centro  $C$  è soggetto ad una forza elastica di richiamo verso l'origine di costante  $k$ . Si assumano come coordinate Lagrangiane l'ascissa  $x$  di  $A$  e l'angolo  $\theta$  che il segmento orientato  $CA$  forma col semiasse positivo delle ascisse misurato a partire da quest'ultimo in verso antiorario. Si adotti la notazione  $\alpha = \frac{2Mg}{kR}$ .

**Rispondere ai seguenti quesiti dandone dimostrazione nel foglio allegato**

1 - Energia cinetica  $T$

2 - Energia potenziale  $V$

3 - Configurazioni di equilibrio  $(x, \theta)$

4 - Derivate seconde di  $V$ :  $V_{xx}, V_{\theta\theta}, V_{x\theta}$

5 - Matrici Hessiane di  $V$  nelle configurazioni di equilibrio e eventuale stabilità o instabilità

6 - Verificato che  $x = 0; \theta = \pi/2$  può essere configurazione di equilibrio stabile, scrivere le equazioni differenziali delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

7 - Posto  $k = 0$ , integrali primi del sistema Lagrangiano così ottenuto.

8 - Per le condizioni iniziali  $x = 0, \dot{x} = 0; \theta = 0, \dot{\theta} = 0$ , scrivere equazione nelle sole variabili  $\theta, \dot{\theta}$ .

9 - Valori di  $\dot{\theta}$  corrispondenti a  $\theta = \pi/2$ .