

COMPITO D'ESONERO DEL 11 GIUGNO 2014

MECCANICA RAZIONALE

DOCENTE CAMMAROTA

Una lamina omogenea di massa m ha la forma di un rombo con diagonale maggiore OA di lunghezza R e diagonale minore di lunghezza $R/2$. La lamina si muove in un piano verticale col vertice O coincidente col centro di una circonferenza immateriale di raggio R . Sulla circonferenza si muove un punto P di massa m soggetto ad una forza di richiamo elastica di costante k verso A . Si assuma un sistema di coordinate ortogonali Oxy , con asse y verticale orientato verso l'alto e come coordinate Lagrangiane gli angoli θ e ϕ che i segmenti orientati OA e OP formano col semiasse negativo delle ordinate misurati a partire da quest'ultimo in verso antiorario.

1. Si denotino I_O , I_G i momenti d'inerzia assiali della lamina in O e nel baricentro G . Si trovi la Lagrangiana del sistema e se ne deducano le equazioni di Lagrange.
2. Si verifichi l'equilibrio e si discuta la stabilità delle posizioni $\theta = 0, \pi$, $\phi = 0, \pi$.
3. Si scrivano le equazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile $\theta = 0, \phi = 0$.
4. Posto il sistema in un piano orizzontale, si ponga $\alpha = \phi - \theta$ e scritta la Lagrangiana nelle coordinate θ, α si discuta l'esistenza di eventuali integrali primi e se ne discuta il significato alla luce delle equazioni cardinali. Si mostri come usando gli integrali primi il moto si riconduce ad un sistema unidimensionale in α e $\dot{\alpha}$.
5. Si calcolino I_O , I_G .