Primo compito di esonero

Meccanica Razionale - Canale A - La

22 aprile 2013

Docente C. Cammarota

Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi senza attrito su un profilo descritto dall'equazione $y = 1 - e^{-x^2}$ in un piano verticale dotato di un sistema di assi Cartesiani ortogonali Oxy con asse y orientato verso l'alto. Il punto è soggetto al peso e ad una forza elastica di richiamo con costante $k > 0$ verso la sua proiezione sull'asse y.

1. Scrivere l'equazione differenziale pura del moto nella variabile x e determinare le posizioni di equilibrio.
2. Scrivere l'energia in funzione di x e $\dot{x}$ e, sapendo che è un integrale primo, verificare che non esistono moti a meta asintotica.
3. Per il moto con condizioni iniziali $x = 0, \dot{x} = c$ dire per quali valori di c il punto materiale P supera la quota $y = 1/2$.
4. Per il moto che ha un punto di arresto in $x = 1/\sqrt{2}$ determinare la reazione vincolare in tale punto.
5. Detto $T(E)$ il periodo delle oscillazioni di energia E stabilire la disuguaglianza relativa alle piccole oscillazioni attorno a $x = 0$

$$\lim_{E \to 0} T(E) \geq 2\pi \sqrt{\frac{m}{k + 2mg}}$$

Secondo compito di esonero

Meccanica Razionale

5 giugno 2013

Docenti Boldrighini - Cammarota

Un disco di centro O e raggio R è composto da due semidischi di diverso materiale separati dal diametro AB, aventi masse M_1 e M_2 (si assuma $M_2 > M_1$ e si ponga $M = M_1 + M_2$), e sia C il punto medio dell'arco di estremi A e B appartenente alla porzione avente massa maggiore.

Il disco è vincolato a muoversi in un piano verticale con il suo centro O fisso, assunto come origine di un sistema di assi cartesiani Oxy con asse y verticale orientato verso l'alto. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sull'asse x ed è soggetto ad una forza di richiamo elastica verso C di costante $k > 0$. Si adottino come coordinate Lagrangiane x e l'angolo θ che OC forma col semiasse negativo delle ordinate, misurato a partire da questo in verso antiorario.

1. Si suppongano noti la distanza d da O del baricentro G del disco, e il momento d'inerzia I_O del disco rispetto all' asse ad esso ortogonale passante per O. Si scriva la Lagrangiana del sistema e le relative equazioni di Lagrange.
2. Si trovino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità in funzione dei parametri del sistema.
3. Supponendo $\alpha := \frac{Mgd}{kR^2} = 2$ si scrivano le equazioni delle piccole oscillazioni per le variabili x e θ attorno ad una configurazione di equilibrio stabile.
4. Si calcoli a scelta d oppure I_O.

COMPITO D'ESAME DEL 26 GIUGNO 2013

MECCANICA RAZIONALE

DOCENTI BOLDRIGHINI - CAMMAROTA

Una lamina omogenea di massa M ha la forma di un triangolo rettangolo isoscele ABC con ipotenusa BC e cateti aventi lunghezza l. La lamina si muove in un piano verticale col suo vertice A vincolato all' asse orizzontale x di un sistema di coordinate ortogonali Oxy, con asse y verticale orientato verso l'alto. Il punto medio H di BC è soggetto ad una forza di richiamo elastica di costante k verso O. Si assumano come coordinate Lagrangiane l'angolo θ che AH forma col semiasse negativo delle ordinate misurato a partire da quest'ultimo in verso antiorario e l'ascissa x di A

1. Si trovi la posizione del baricentro G e, lasciando il momento d'inerza indicato, si scriva la Lagrangiana del sistema e se ne deducano le equazioni di Lagrange.
2. Si discuta l'esistenza di posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
3. Supponendo che il vertice A sia vincolato alla posizione $x = l$, nel caso $\frac{kl}{Mg} = \frac{2}{3}$, si individui una posizione di equilibrio stabile per il moto della variabile θ e si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
4. Si risponda a scelta a una delle due domande: a) si calcoli il momento d'inerzia rispetto al baricentro I_G; b) in relazione al punto 2, si calcoli la reazione vincolare nel punto A per la posizione di equilibrio stabile nel caso $\frac{Mg}{kl} = 2$.

COMPITO D'ESAME DEL 17 LUGLIO 2013

MECCANICA RAZIONALE

DOCENTI BOLDRIGHINI - CAMMAROTA

Una sbarretta omogenea di massa m, lunghezza l, estremi AB ha il suo punto medio C vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio R, avente centro nell'origine O di un sistema di assi cartesiani Oxy con asse x orizzontale e asse y verticale orientato verso l'alto. Sull'estremo A agisce una forza elastica di richiamo di costante k verso l'origine. Si assumano come coordinate Lagrangiane l'angolo θ che il segmento orientato OC forma col semiasse negativo delle ordinate misurato da questo in verso antiorario e l'angolo φ che il segmento orientato AB forma con l'asse x a partire da questo in verso antiorario.

1. Si trovi la Lagrangiana del sistema e se ne deducano le equazioni di Lagrange.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio e se ne individui una di equilibrio stabile.
3. Si consideri il sistema posto su un piano orizzontale (assenza di peso), e si denoti z l'asse verticale. Si esprima la Lagrangiana nelle variabili (θ, α) con $\alpha = \theta - \varphi$. Si trovino gli integrali primi dalla Lagrangiana e se ne discuta il significato anche alla luce delle equazioni cardinali.
4. Si risolva a scelta uno dei seguenti quesiti:

   a) Nel caso del piano verticale si scriva la Lagrangiana delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile trovata al punto 2.

   b) Nel caso del piano orizzontale con l'ausilio di due integrali primi si ricavi $\dot{\alpha}$ in funzione della sola α riconducendo così il problema al calcolo di un integrale (si ponga per semplicità $mR^2 = ml^2/12 = c$).

COMPITO D'ESAME DEL 9 SETTEMBRE 2013

MECCANICA RAZIONALE

DOCENTI BOLDRIGHINI - CAMMAROTA

Un doppio pendolo è composto da due sbarrette rigide ciascuna di lunghezza l e massa m, incernierate nell'estremo comune A. La prima ha l'altro estremo O fisso nell'origine di un sistema cartesiano con asse x orizzontale e asse y verticale orientato verso l'alto. Nella seconda l'altro estremo B è soggetto ad una forza di richiamo elastica di costante k verso la proiezione di B sull'asse x. Si assumano come coordinale Lagrangiane gli angoli θ_1 e θ_2 che rispettivamente le sbarrette OA e AB formano col semiasse negativo delle ordinate misurati a partire da quest'ultimo in verso antiorario.

1. Si scriva la Lagrangiana del sistema.
2. Si verifichi che le quattro configurazioni $\theta_1 = 0, \pi, \theta_2 = 0, \pi$ sono di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare del parametro k. Si discuta l'esistenza di altre configurazioni di equilibrio.
3. Si scrivano le equazioni differenziali delle piccole oscillazioni per le variabili θ_1 e θ_2 attorno alla configurazione $(0, 0)$.
4. Posto un vincolo sulla cerniera che comporta $\theta_1 = \theta_2$, si esegua l'analisi qualitativa del sistema unidimensionale risultante.

COMPITO D'ESAME DEL 23 SETTEMBRE 2013

MECCANICA RAZIONALE

DOCENTI BOLDRIGHINI - CAMMAROTA

Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio R posta in un piano verticale con centro O, origine di un sistema di assi cartesiani Oxy con asse y verticale orientato verso l'alto. Una sbarretta omogenea OA di massa m e lunghezza R ha l' estremo O fisso coincidente col centro della circonferenza. Tra il punto P e l'estremo A si esercita una forza di richiamo elastica di costante k. Si assumano come coordinate Lagrangiane la coppia (θ, ϕ), dove θ e ϕ sono rispettivamente gli angoli formati da OA e OP col semiasse negativo delle ordinate, misurati da questo in verso antiorario.

1. Si trovi la Lagrangiana del sistema e se ne deducano le equazioni di Lagrange.
2. Si verifichi che le 4 configurazioni, $\theta = 0, \pi$ e $\phi = 0, \pi$ sono di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
3. Si ponga il sistema in un piano orizzontale (assenza di peso) introducendo un asse verticale z orientato verso l'alto. Si scriva la Lagrangiana nelle nuove variabili (α, ϕ), dove $\alpha = \theta - \phi$, e si verifichi che che la componente lungo z del momento angolare del sistema rispetto ad O è un integrale primo e se ne discuta il significato alla luce delle equazioni cardinali.
4. Si usino i due integrali primi (energia e momento angolare) per trovare una equazione del moto relativa alla sola coordinata α.

COMPITO D'ESAME DEL 12 NOVEMBRE 2013

MECCANICA RAZIONALE

DOCENTI BOLDRIGHINI - CAMMAROTA

Un corpo rigido omogeneo di massa M contenuto in un piano verticale è formato da una semicirconferenza di centro O e raggio R e dal diametro AB (la semicirconferenza viene percorsa in verso antiorario da A a B). Il centro O è fisso e coincide con l'origine di un sistema di assi Cartesiani Oxy con l'asse x orizzontale e asse y verticale orientato verso l'alto. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sull'asse y ed è soggetto ad una forza di richiamo elastica di costante k, verso il punto medio C della semicirconferenza. Si assumano come coordinate Lagrangiane l'angolo θ che AB forma col semiasse positivo delle x misurato in verso antiorario e l'ordinata y di P.

1. Si calcolino la distanza d del baricentro G da O e il momento di inerzia I_O del corpo rispetto ad un asse per O ortognale al corpo.
2. Si scriva la Lagrangiana e se ne deducano le equazioni del moto.
3. Si discuta in funzione del parametro k l'esistenza di posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
4. Posto $y = R$ si esegua l'analisi qualitativa del sistema unidimensionale risultante in θ in funzione del parametro k.

COMPITO D'ESAME DEL 20 GENNAIO 2014

MECCANICA RAZIONALE

DOCENTI BOLDRIGHINI - CAMMAROTA

Una sbarreta OA di massa M e lunghezza l è vincolata a muoversi in un piano verticale con l'estremo O fisso e coincidente con l'origine di un sistema di assi Cartesiani Oxy con l'asse x orizzontale e asse y verticale orientato verso l'alto. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sull'asse x ed è soggetto ad una forza di richiamo elastica di costante k verso l'estremo A della sbarretta. Si assumano come coordinate Lagrangiane l'angolo θ che OA forma col semiasse negativo delle y misurato a partire da questo in verso antiorario e l'ascissa x di P.

1. Si scriva la Lagrangiana e se ne deducano le equazioni del moto
2. Si discuta in funzione del parametro $Mg/2kl$ l'esistenza di posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
3. Si scrivano le equazioni delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile $\theta = 0, x = 0$.
4. Posto $x = l$ si consideri il sistema unidimensionale nella variabile θ. Posto inizialmente $\theta = 0$ quali valori deve assumere inizialmente $\dot{\theta}$ affinchè per qualche tempo t sia $\theta(t) > \pi$? Determinare la posizione di equilibrio stabile per θ e calcolare il periodo delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

Meccanica Razionale
Docente C. Cammarota

22 aprile 2013
Appello straordinario

Una sbarretta omogenea AB di massa M e lunghezza l è vincolata a muoversi in un piano verticale con l'estremo A fisso. Un punto materiale P di massa m si muove sulla retta definita da A e B. Si assuma un riferimento con asse x orizzontale e asse y verticale orientato verso l'alto, con origine nel punto A. Si assumano le seguenti coordinate Lagrangiane: l'angolo θ che il segmento orientato AB forma col semiasse negativo delle ordinate, a partire da questo in verso antiorario; l'ascissa ξ di P sulla retta orientata da A a B con origine in A. Il punto P è soggetto ad una forza di richiamo elastica verso la sua proiezione sull'asse x di costante $k > 0$. Sul sistema agisce inoltre la forza peso e non agisce attrito.

1. Si trovi la Lagrangiana del sistema ed eventuali integrali primi.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
3. Si scrivano le equazioni delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio con $\theta = 0$
4. Nel caso $\theta = \pi/3$ si trovi il moto del punto P posto inizialmente nel baricentro della sbarra con velocità nulla.