Esame di Meccanica Razionale A.A. 2013-2014
Canale II
Compito scritto del 10/11/2014

Si consideri nel piano verticale un riferimento inerziale, di origine O, assi ortonormali e coordinate (x, y). L'asse delle y è diretto lungo la verticale ascendente. Nel piano è posizionata una circonferenza $\mathcal{K}$ pesante omogenea con centro C, raggio R e massa M (la massa è distribuita sulla circonferenza). Tale cerchio è libero di ruotare attorno al suo centro C, che può a sua volta scorrere liberamente lungo l'asse delle x. Sul cerchio è libero di scorrere un punto materiale P di massa m, che è richiamato verso l'origine O da una molla elastica di costante k.

Scrivere la lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema in funzione delle coordinate lagrangiane θ, anomalia del segmento orientato CP rispetto l'asse delle ascisse, presa in senso antiorrio, x, che individua la posizione di C su detto asse, e un angolo ϕ che descrive la rotazione della circonferenza $\mathcal{K}$ attorno al suo centro C.

- Si dimostri che la lagrangiana $\mathcal{L}$ si presenta come somma di due lagrangiane:
$$\mathcal{L} = L_1(\dot{\phi}) + L_2(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) \tag{0.1}$$
e si scrivano le equazioni di Lagrange.
- Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema in funzione del parametro $\lambda = \frac{mg}{kR}$.
- Si studi la stabilità delle soluzioni stazionarie del sistema relativo alla lagrangiana L_2 in funzione di λ.
- Si disegni il diagramma di biforcazione di tali posizioni di equilibrio in funzione di λ.
- Si determini la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione stabile per $\lambda = 4$.
- Si determini una soluzione periodica non triviale del sistema di Lagrange relativo alla lagrangiana $\mathcal{L}$.

Svolgimento

Usando la parametrizzazione suggerita si ha

$$OC = (x, 0), \qquad OP = (x + R\cos\theta, R\sin\theta).$$

Detto $I = MR^2$ il momento d'inerzia di $\mathcal{K}$ rispetto al suo centro C, l'energia cinetica di $\mathcal{K}$ e del punto materiale sono, rispettivamente,

$$T_{\mathcal{K}} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2, \qquad T_P = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 - 2R\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta),$$

mentre l'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}k(x^2 + 2Rx\cos\theta) + mgR\sin\theta.$$

Pertanto la Lagrangiana si scrive nella forma (**??**) con $L_1(\dot{\phi}) = \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2$ e

$$L_2(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left[(M+m)\dot{x}^2 + m(R^2\dot{\theta}^2 - 2R\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta)\right] - mgR\sin\theta - \frac{1}{2}k(x^2 + 2Rx\cos\theta).$$

Si ha

$$\frac{\partial L_2}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} - mR\dot{\theta}\ \sin\theta, \qquad \frac{\partial L_2}{\partial \dot{\theta}} = m(R^2\dot{\theta} - mR\dot{x}\sin\theta) \tag{0.2}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial x} = -k(x + R\cos\theta), \qquad \frac{\partial L_2}{\partial \theta} = -mR\cos\theta(\dot{x}\dot{\theta} + g) + kRx\sin\theta. \tag{0.3}$$

Le equazioni per i punti di equilibrio sono

$$\frac{\partial U}{\partial x} = k(x + R\cos\theta) = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta} = R\left(mg\cos\theta - kx\sin\theta\right) = 0. \tag{0.4}$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda troviamo l'equazione

$$\cos\theta\ (mg + kR\sin\theta) = 0.$$

Si vede dunque che per qualunque valore di λ ci sono le soluzioni

$$(x_1, \theta_1) = (0, \frac{\pi}{2}), \qquad (x_2, \theta_2) = (0, -\frac{\pi}{2}). \tag{0.5}$$

Se $\lambda \leq 1$ ci sono due altre soluzioni. Detta $\theta(\lambda)$ la soluzione dell'equazione $\theta = \arcsin(\lambda)$ che cade nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$ le altre due soluzioni sono

$$(x_3, \theta_3) = \left(-R\cos\theta(\lambda),\ -\theta(\lambda)\right), \qquad (x_4, \theta_4) = \left(R\cos\theta(\lambda),\ \pi - \theta(\lambda)\right), \tag{0.6}$$

che per $\lambda \to 1$ convergono a (x_2, θ_2).

Esaminiamo la matrice hessiana corrispondente alle equazioni (**??**):

$$H(x, \theta) = \begin{pmatrix} k & -kR\sin\theta \\ -kR\sin\theta & -R(mg\sin\theta + kx\cos\theta). \end{pmatrix} \tag{0.7}$$

Pertanto abbiamo:

1. $H(x_1, \theta_1)$ ha determinante negativo per ogni λ, quindi è sempre instabile.

2. $H(x_2, \theta_2)$ ha traccia positiva e determinante pari a $k^2R^2(\lambda - 1)$, quindi è stabile per $\lambda > 1$ e instabile per $\lambda < 1$.

3,4. Le due soluzioni sono simmetriche (differiscono solo per l'orientamento), quindi basta esaminare la 3. L'hessiano è

$$H(x_3, \theta_3) = \begin{pmatrix} k & kR\lambda \\ kR\lambda & kR^2 \end{pmatrix} \tag{0.8}$$

il cui determinante è $k^2R^2(1 - \lambda^2)$. Queste soluzioni sono dunque stabili per $\lambda < 1$.

Come diagramma di biforcazione si possono riportare riportare i valori delle funzioni $-\theta_3(\lambda), -\theta_4(\lambda)$ che per $\lambda = 0$ partono dai punti $0, \pi$, e per $\lambda \geq 1$ coincidono con la funzione costante $-\theta_2(\lambda) = \frac{\pi}{2}$.

Per $\lambda = 4$ c'è un'unica soluzione stabile $(x_2, \theta_2) = (0, -\frac{\pi}{2})$. Poniamo

$$x = \eta_1, \qquad \theta = \theta_2 + \eta_2.$$

L'hessiano e la matrice dell'energia cinetica sono $(mg = 4kR)$

$$H(x_2, \theta_2) = \begin{pmatrix} k & kR \\ kR & 4kR^2 \end{pmatrix}, \qquad T(x_2, \theta_2) = \begin{pmatrix} M + m & mR \\ mR & mR^2. \end{pmatrix} \tag{0.9}$$

Gli autovalori del problema

$$\det\left[H(x_2, \theta_2) - \mu T(x_2, \theta_2)\right] = 0$$

sono le soluzioni dell'equazione

$$(k - \mu(M + m))(4k - \mu m) = (k - \mu m)^2$$

e danno le frequenze delle piccole oscillazioni $\omega_\pm$:

$$\mu = 2\frac{k}{m} \pm \sqrt{\frac{4k^2}{m^2} - \frac{3k^2}{mM}} = \omega_{1,2}^2.$$

Per la soluzione periodica si osservi che per $\theta \equiv 0$ l'equazione del moto per la lagrangiana L_2 diventa

$$(M + m)\ddot{x} + k(x + R) = 0$$

che ha soluzioni periodiche di pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m)}}$. Se ora il cerchio $\mathcal{K}$ si muove intorno al suo centro C con moto periodico di eguale periodo si ha una soluzione periodica relativa alla lagrangiana $\mathcal{L}$.