Esame di Meccanica Razionale
Compito scritto dello 23.09.2014

Si consideri nel piano verticale un riferimento inerziale, di origine O, assi ortonormali e coordinate (x, y). L'asse delle y è diretto lungo la verticale ascendente. Nel piano è posizionato un cerchio pesante omogeneo con centro C, raggio R e massa M (la massa è distribuita in modo omogeneo sulla circonferenza). Tale cerchio è libero di ruotare attorno al suo centro C che può scorrere liberamente lungo l'asse y. Un punto B del cerchio viene richiamato dall'origine O tramite una molla elastica di costante k.

Si assumano come coordinate lagrangiane θ, l'anomalia che individua il punto B rispetto all'asse orizzontale, e y che individua la quota di C.

- Si scrivano la lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema e le equazioni di Lagrange.
- Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema in funzione del parametro $\lambda = \frac{Mg}{kR}$.
- Si studi la stabilità delle soluzioni stazionarie in funzione di λ.
- Si disegni il diagramma di biforcazione delle posizioni di equilibrio in funzione di λ.
- Si determini la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione stabile per $\lambda > 1$.
- Si determinino i moti del sistema in corrispondenza alle condizioni iniziali $\theta_0 = \pm\frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta}_0 = 0$.
- Si consideri ora il sistema modificato, ottenuto dal quello descritto bloccando il centro C del cerchio nel punto $(0, -R)$. Si scriva la lagrangiana di questo nuovo sistema e si consideri il corrispondente sistema di Lagrange. Si descrivano le relative orbite nello spazio delle fasi $(\theta, \dot{\theta})$.

Svolgimento

Si ha $OB = (R\cos\theta, y + R\sin\theta)$. Ne consegue che l'energia potenziale U_k della molla è data da:

$$U_k = \frac{k}{2}(y^2 + 2Ry\sin\theta)$$

L'energia potenziale U_g della forza peso è data da:

$$U_g = Mgy$$

Dunque l'energia potenziale del sistema U è:

$$U = \frac{k}{2}y^2 + y(Mg + kR\sin\theta) \tag{0.1}$$

L'energia cinetica del sistema T è data da:

$$T = \frac{1}{2}[I\dot{\theta}^2 + M\dot{y}^2] \tag{0.2}$$

con $I = MR^2$. Quindi

$$L = \frac{1}{2}[I\dot{\theta}^2 + M\dot{y}^2] - \frac{k}{2}y^2 - y(Mg + kR\sin\theta) \tag{0.3}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= ky + Mg + kR\sin\theta \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= ykR\cos\theta \end{aligned} \tag{0.4}$$

Le equazioni di Lagrange sono quindi

$$\begin{aligned} M\ddot{y} &= -(ky + Mg + kR\sin\theta) \\ MR^2\ddot{\theta} &= -ykR\cos\theta \end{aligned} \tag{0.5}$$

dunque i punti critici di U sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{aligned} ky + Mg + kR\sin\theta &= 0 \\ y\cos\theta &= 0 \end{aligned} \tag{0.6}$$

Per qualunque valore di $\lambda \in \mathbb{R}^+$ si hanno le soluzioni:

$$\begin{aligned} (y_1, \theta_1) &= (-R(1+\lambda), \frac{\pi}{2}) \\ (y_2, \theta_2) &= (R(1-\lambda), -\frac{\pi}{2}) \end{aligned} \tag{0.7}$$

e se $\lambda < 1$, si aggiungono le soluzioni

$$\begin{aligned} (y_3, \theta_3) &= (0, -\arcsin\lambda) \\ (y_4, \theta_4) &= (0, -\pi + \arcsin\lambda) \end{aligned} \tag{0.8}$$

Per $\lambda = 1$ si ha $(y_3, \theta_3) = (y_4, \theta_4) = (y_2, \theta_2)$.

I grafici di $y_\alpha(\lambda)$, $\alpha = 1, 2$ nel piano (λ, θ) il sono banali (segmenti con coefficiente angolare $-R$). Più interessanti i grafici di $\theta_\alpha(\lambda)$, $\alpha = 3, 4$ c he forniscono nel piano (λ, θ) il classico diagramma "a forchetta" con vertice in $(1, -\frac{\pi}{2})$. Per $\lambda \to 0$ il grafico della funzione $\theta_3(\lambda)$ tende al punto 0, il grafico della funzione $\theta_4(\lambda)$ tende al punto $-\pi$. Ovviamente il grafico è equivalente si ottiene innalzando il precedente grafico di 2π.

Esaminiamo la matrice hessiana di U. Si ha:

$$H(y, \theta) = \begin{pmatrix} k & kR\cos\theta \\ kR\cos\theta & -kRy\sin\theta \end{pmatrix} \tag{0.9}$$

Quindi:

- $H(y_1, \theta_1)$ ha determinante positivo, traccia positiva e la corrispondente soluzione stazionaria è stabile.
- $H(y_2, \theta_2)$ ha determinante negativo per $\lambda > 1$ e la corrispondente soluzione stazionaria è instabile, determinante positivo e traccia positiva per $\lambda < 1$ la corrispondente soluzione stazionaria è stabile.
- $H(y_{3,4}, \theta_{3,4})$ ha determinante negativo. Ne consegue che le soluzioni stazionarie corrispondenti ai punti critici $(y_{3,4}, \theta_{3,4})$ s (quando esistono) sono instabili.

Consideriamo ora le "piccole oscillazioni" attorno all'equilibrio (y_1, θ_1). La matrice dell'energia cinetica A è data da:

$$A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & MR^2 \end{pmatrix} \tag{0.10}$$

Inoltre

$$H(y_1, \theta_1) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & kR^2(1+\lambda) \end{pmatrix} \tag{0.11}$$

Posto $(y, \theta) = (y_1 + \eta, \theta_1 + \phi)$ l'equazione dei modi normali è :

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} &= -\frac{k}{M}\eta \\ \ddot{\phi} &= -\frac{k}{M}(1+\lambda)\phi \end{aligned} \tag{0.12}$$

Quindi la frequenza con cui y oscilla intorno ad y_1 è $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}$, la frequenza con cui θ oscilla intorno ad θ_1 è $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{M}(1+\lambda)}$.

Il sistema (??) mostra che in corrispondenza ai dati iniziali $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ si ha $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$). Quindi il sistema si riduce all'equazione:

$$M\ddot{y} = -(ky + Mg + kR) \tag{0.13}$$

la cui soluzione generale è

$$y(t) = A\cos\omega_1 t + \alpha) - \frac{Mg + kR}{k}$$

Il lettore completi considerando i dati iniziali $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (-\frac{\pi}{2}, 0)$.
La lagrangiana relativa al sistema descritto nell'ultima domanfa è

$$L = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 - hkR\sin\theta \tag{0.14}$$

ove con h si è indicata una generica quota fissa di C, e quindi la ben nota equazione del pendolo non lineare, più volte studiata:

$$\ddot{\theta} = -\mu\cos\theta$$

dove $\mu = \frac{hk}{RM}$ (si osservi che la costante può essere sia negativa che positiva). Dunque si tracci il grafico di $U = \mu\sin\theta$ e si proceda per determinare le orbite nel piano delle fasi. $\square$