Esame di Meccanica Razionale
Compito scritto dello 09.09.2014

Si consideri un riferimento inerziale, di origine O, assi ortonormali e coordinate (x, y, z). L'asse delle z è diretto lungo la verticale ascendente. Nel piano $z = 0$ è posizionato un cerchio pesante omogeneo con centro O, raggio R e massa M (la massa è distribuita in modo omogeneo sulla circonferenza). Tale cerchio è libero di ruotare attorno al suo centro. Un punto B del cerchio viene richiamato da un centro Q di coordinate $(l, 0, 0)$ tramite una molla elastica di costante k. Infine sull'asse verticale è libero di scorrere un punto materiale P di massa m. I punti P e B interagiscono con una energia potenziale data da:

$$U_{PB} = \gamma R \log \frac{|BP|^2}{R^2}$$

essendo $|BP|$ la distanza tra B e P, e γ una costante positiva.

- Scrivere la lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema in funzione delle coordinate lagrangiane θ (anomalia che individua il punto B rispetto l'asse x) e $q := \frac{z}{R}$ (z è la coordinata verticale di P). Si dimostri che tale lagrangiana si separa nella somma di due lagrangiane indipendenti

  $$\mathcal{L}(\theta, q, \dot{\theta}, \dot{q}) = \mathcal{L}_1(\theta, \dot{\theta}) + \mathcal{L}_2(q, \dot{q}), \tag{0.1}$$

  e si scrivano le relative equazioni del moto, indicando esplicitamente l'espressione del momento d'inerzia del cerchio in funzione dei parametri assegnati.

- Studiare il sistema lagrangiano di lagrangiana $\mathcal{L}_1$. In particolare:

  - si descriva il ritratto delle orbite nel piano delle fasi;

  - si determini il livello di energia che spetta alle soluzioni asintotiche nel passato e nel futuro all'equilibrio instabile;

  - si determini la frequenza delle "piccole oscillazioni" relativamente alla posizione di equilibrio stabile.

- Studiare il sistema lagrangiano di lagrangiana $\mathcal{L}_2$. In particolare:

  - si determinino le eventuali soluzioni stazionarie al variare del parametro $\lambda = \frac{\gamma}{mg}$;

  - si determini la stabilità di tali soluzioni;

  - si disegnino le orbite nel piano delle fasi al variare di $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Svolgimento

Si ha $OP \equiv (0,0,z) = R(0,0,q)$, $OB \equiv R(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ quindi

$$U_{PB} = \gamma R \log(q^2+1)$$

Poiché $|BQ|^2 = (l - R\cos\theta)^2 + R^2\sin^2\theta)$ l'energia potenziale della molla che attrae il punto P dal centro Q è:

$$U_k = -klR\cos\theta.$$

Infine l'energia del campo di gravitazionale che si esercita sul punto P è:

$$U_P = mgz = Rmgq$$

In conclusione l'energia potenziale del sistema è:

$$U = R\{mg[\lambda\log(q^2+1)+q] - kl\cos\theta\} \tag{0.2}$$

L'energia cinetica del sistema T è data da:

$$T = \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\dot{z}^2 = \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + R^2\frac{m}{2}\dot{q}^2 \tag{0.3}$$

con $I = MR^2$. La lagrangiana del sistema risulta quindi

$$\mathcal{L}(\theta, q, \dot{\theta}, \dot{q}) = \mathcal{L}_1(\theta, \dot{\theta}) + \mathcal{L}_2(q, \dot{q}), \tag{0.4}$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + Rkl\cos\theta \\ \mathcal{L}_2(q, \dot{q}) &= Rm\{\frac{R}{2}\dot{q}^2 - g[\lambda\log(q^2+1)+q]\} \end{aligned} \tag{0.5}$$

Il sistema di Lagrange si scinde quindi in due sottosistemi unidimensionali , l'uno relativo alla lagrangiana $\mathcal{L}_1(\theta, \dot{\theta})$, l'altro alla lagrangiana $\mathcal{L}_2(q, \dot{q})$. Precisamente si hanno le due equazioni differenziali:

$$I\ddot{\theta} = -Rkl\sin\theta \tag{0.6}$$

e

$$R\ddot{q} = -g[\frac{2q\lambda}{(1+q^2)} + 1] \tag{0.7}$$

Si riscrive (0.6) nella forma

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\sin\theta,\, \omega = \sqrt{\frac{kl}{MR}} \tag{0.8}$$

e si conclude subito che si tratta dell'equazione di un pendolo nonlineare, con le posizioni di equilibrio $\theta_s = 0$ (stabile) e $\theta_u = \pi$ (instabile). Ovviamente la frequenza delle piccole oscillazioni attorno a θ_s è ω. L'energia del pendolo è

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{MR^2}{2}\dot{\theta}^2 - Rkl\cos\theta$$

quindi l' orbita delle soluzione asintotica nel passato (risp. nel futuro) alla soluzione stazionaria $(\pi, 0)$ giace sul livello

$$E(\pi, 0) = Rkl$$

cosicché soddisfa l'equazione $\dot{\theta} = -2\omega(\cos\theta + 1)$ (risp. $\dot{\theta} = 2\omega(\cos\theta + 1)$).

Passiamo allo studio della lagrangiana $\mathcal{L}_2(q, \dot{q})$. Gli eventuali punti di equilibrio sono dati alle soluzioni reali dell'equazione $\frac{dU_2}{dq} = 0$, con $U_2 = \lambda \log(q^2 + 1) + q$ quindi

$$\frac{2q\lambda}{1 + q^2} + 1 = 0 \tag{0.9}$$

ovvero

$$q^2 + 2\lambda q + 1 = 0 \tag{0.10}$$

Esistono quindi solo se $\lambda \geq 1$ e sono:

$$q_{\pm}(\lambda) = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1} \tag{0.11}$$

Ovviamente per $\lambda = 1$ si ha la soluzione doppia $q_{\pm}(1) = -1$. Per $\lambda < 1$ non si hanno soluzioni stazionarie. Si ha poi:

$$\frac{d^2U_2}{dq^2} = \frac{-q^2 + 1}{(1 + q^2)^2} \tag{0.12}$$

Dunque $\lambda \geq 1$ valutiamo il segno di $1 - q_{\pm}^2$. Si ha dalla (0.11)

$$1 - q_{\pm}^2 = 2(-\sqrt{\lambda^2 - 1} \pm \lambda)(\sqrt{\lambda^2 - 1}$$

Ovviamente per $\lambda = 1$ si ha un equilibrio degenere mentre, per $\lambda > 1$, q_+ è un minimo proprio per U_2 e q_- è un massimo proprio per U_2. Conclusione:

- per $\lambda > 1$ si hanno due soluzioni stazionarie, $(q_+, 0)$ stabile, $(q_-, 0)$ instabile;

- per $\lambda = 1$ le due soluzioni coincidono e danno la soluzione stazionaria $(-1, 0)$ e la sua stabilità non pu 0 essere decisa dall'esame della parte quadratica di U_2 (relativamente a $q = -1$). Il grafico della funzione $U_2 = \log(q^2 + 1) + q$ ed il corrispondente grafico delle orbite nello spazio delle fasi $(q, \dot{q})$ mostra chiaramente che $(-1, 0)$ è instabile;

- per $\lambda < 1$ non ci sono soluzioni stazionarie (il punto P cade indefinitamente lungo l'asse z).