Secondo esonero M.R. 2013-14

June 12, 2014

Nel piano verticale viene introdotto un sistema di coordinate con origine O, asse x orizzontale, mentre l' asse y verticale è orientato verso l'alto. Un disco omogeneo di massa M e raggio r è libero di ruotare attorno al suo centro O. Sul bordo del disco è fissato un punto materiale P_1 di massa m. Sulla retta di equazione $x = h$, $h > r$, è libero di scorrere un punto materiale P_2 anch'esso di massa m. Il punto materiale P_1 è richiamato tramite una molla elastica di costante $k > 0$ da un centro fisso C, di coordinate $(-h, 0)$. Infine i punti P_1 e P_2 interagiscono con una molla elastica, anch'essa di costante $k > 0$. Si chiede di:

- scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Lagrange;
- determinare le soluzioni stazionarie;
- studiarne quindi le proprietà di stabilità in funzione del parametro $\lambda = \frac{2mg}{kr}$, per i valori di λ per cui sono decidibili tramite lo studio della matrice hessiana;
- individuare una soluzione stazionaria stabile per $\lambda = 2$ e studiare le piccole oscillazioni, determinandone le frequenze.
- Si consideri ora il sistema che si ottiene sopprimendo l 'i nterazione (cioè la molla) tra i punti materiali P_1 e il P_2. Si dimostri che il corrispondente sistema di Lagrange si separa in due sottosistemi indipendenti. Di ciascuno di questi si disegnino le orbite nel piano delle corrispondenti fasl.

. Svolgimento

Siano $OP_1 = r(\cos\theta, \sin\theta)$, $OP_2 = (h, y)$, $= C = (-h, 0)$. Si ha:

$$\begin{aligned} |P_1P_2|^2 &= r^2 + h^2 + y^2 - 2(h\cos\theta + y\sin\theta) \\ |P_1C|^2 &= r^2 + h^2 + 2h\cos\theta \end{aligned} \tag{0.1}$$

L'energia potenziale U è quindi:

$$U = k[\frac{y^2}{2} - yr\sin\theta] + mg(y + r\sin\theta) \tag{0.2}$$

L' energia cinetica del sistema T è:

$$T = \frac{1}{2}[(I+m)\dot{\theta}^2 + m\dot{y}^2] \tag{0.3}$$

La lagrangiana è quindi:

$$L = \frac{1}{2}[(I+m)\dot{\theta}^2 + m\dot{y}^2] - k[\frac{y^2}{2} - yr\sin\theta] - mg(y + r\sin\theta) \tag{0.4}$$

Gli equilibri sono assegnati dai punti critici di U, quindi dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= -k(r\sin\theta - y) + mg = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= -kr(y - \frac{mg}{k})\cos\theta = 0 \end{aligned} \tag{0.5}$$

Se $\lambda \in (0, 1)$ hanno le soluzioni:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{mg}{k},\ \theta_{11} = \arcsin\lambda \\ y_1 &= \frac{mg}{k},\ \theta_{12} = \pi - \arcsin\lambda \end{aligned} \tag{0.6}$$

Inoltre, qualunque si λ si hanno le soluzioni

$$\begin{aligned} y_2 &= -\frac{mg}{k} + r,\ \theta_2 = \frac{\pi}{2} \\ y_3 &= -\frac{mg}{k} - r,\ \theta_3 = -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{0.7}$$

Si noti che per $\lambda = 1$ coincidono (y_1, θ_{11}), (y_1, θ_{12}) con $(y_2, \frac{\pi}{2})$.

La matrice hessiana di U calcolata nel punto (y_1, θ_{11}) è:

$$H(y_1, \theta_{11} = \begin{pmatrix} k & -kr\cos\theta_{11} \\ -kr\cos\theta_{11} & 0 \end{pmatrix} \tag{0.8}$$

quindi $\det H(y_1, \theta_{11} < 0$ e la posizione di equilibrio, quando esiste è instabile. Stessa sorte per (y_1, θ_{12}). La matrice hessiana di U calcolata nel punto (y_2, θ_2) è:

$$H(y_2, \theta_2 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & kr^2(1-\lambda) \end{pmatrix} \tag{0.9}$$

quindi se $\lambda > 1$ l'equilibrio èinstabile, mentre è stabile per $\lambda < 1$. La matrice hessiana di U calcolata nel punto (y_3, θ_3) è:

$$H(y_3, \theta_3) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & kr^2(1+\lambda) \end{pmatrix} \tag{0.10}$$

quindi l'equilibrio è stabile per ogni λ.
Considero il caso $kr = mg$ (cioè $\lambda = 2$). Il sistema di lagrange linearizzato intorno all' equilibrio $(y_2, \theta_2, 0, 0)$ è, ponendo $(\eta, \phi) = (y - y_2, \theta - \theta_3)$ è:

$$\begin{aligned} m\ddot{\eta} &= -k\eta \\ (I+m)\ddot{\phi} &= -3kr^2\phi \end{aligned} \tag{0.11}$$

Dunque le frequenze delle relative soluzioni non banali sono $(\omega_1, \omega_2) = (\sqrt{\frac{k}{m}}, \sqrt{\frac{3kr^2}{m+I}})$
Rispondiamo all'ultima domanda. La lagrangiana diviene:

$$\begin{aligned} L &= L_1(\theta, \dot{\theta}) + L_2(y, \dot{y}) \\ L_1 &= \frac{1}{2}(I+m)\dot{\theta}^2 - kh\cos\theta - mgr\sin\theta \\ L_2 &= \frac{m}{2}\dot{y}^2 - my \end{aligned} \tag{0.12}$$

Introducendo l'angolo α tramite:

$$(\cos\alpha, \sin\alpha) = \frac{1}{\sqrt{k^2h^2 + m^2g^2r^2}}(kh, mgr) \tag{0.13}$$

e posto $\chi = \theta - \alpha$, L_2 si riscrive

$$L_1 = \frac{1}{2}(I+m)\dot{\chi}^2 - \sqrt{k^2h^2 + m^2g^2r^2}\cos\chi \tag{0.14}$$

a cui corrisponde il sistema del "pendolo matematico". Il sistema corrispondente alla lagrangiana L_2 è ovviamente quello di un punto materiale in caduta libera. □