ALGEBRA 2
prof. Valentina Barucci
21 gennaio 2015

1. Fattorizzare in fattori irriducibili il polinomio $f(x) = x^4 - 7x^2 + 10$ su $\mathbb{Z}_3$

   ....$(x^2+1)^2$.......................................

   Sia E il campo di spezzamento di $f(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$. Allora:

   $$[E : \mathbb{Z}_3] = ...$$

   Chiamata α una radice di $f(x)$, la fattorizzazione in fattori lineari di $f(x)$ su E è:

   ....$(x+\alpha)^2(x-\alpha)^2$......................

   $\mathrm{Gal}(E, \mathbb{Z}_3) \cong$ ....C_2..........

2. Siano α e β due radici di $f(x) = x^4 - 7x^2 + 10 \in \mathbb{Q}[x]$, con $\alpha \neq \pm\beta$. Trovare il polinomio minimo di $\alpha + \beta$ su $\mathbb{Q}$.

   ....$x^4 - 14x^2 + 9$.............................

3. Trovare tra i seguenti gruppi le coppie di gruppi isomorfi ed esplicitare l'isomorfismo per ognuna delle coppie trovate:
   $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$
   (notazioni: $\mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q};\ x > 0\}$ e $\mathbb{Q}^* := \{x \in \mathbb{Q};\ x \neq 0\}$, la stessa cosa per $\mathbb{R}$)

   $f: (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$, ponendo $f(x) = e^x$....................

   $g : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) \to (\mathbb{Q}^*, \cdot)$ ponendo $g([A]) = \det A$...

   ....

4. Sia G un gruppo finito.

   a) Se G è ciclico, allora ogni p-sottogruppo di Sylow di G è ciclico
   vero $\bowtie$ falso $\square$

   Nel caso sia vero, spiegare brevemente il motivo, nel caso sia falso, dare un controesempio:

   ....Ogni sottogruppo di un gruppo ciclico è ciclico.............

   b) Se ogni p-sottogruppo di Sylow di G è ciclico allora G è ciclico
   vero $\square$ falso $\bowtie$

   Nel caso sia vero, spiegare brevemente il motivo, nel caso sia falso, dare un controesempio:

   ....S_3...................................

   c) Se G è abeliano e se ogni p-sottogruppo di Sylow di G è ciclico allora G è ciclico vero $\bowtie$ falso $\square$

   Nel caso sia vero, spiegare brevemente il motivo, nel caso sia falso, dare un controesempio:

   Un gruppo abeliano finito è prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow, che hanno ordini tra loro coprimi

5. Siano $F \subset K \subset L$ campi. Se le estensioni $F \subset K$ e $K \subset L$ sono normali, allora anche l'estensione $F \subset L$ è normale:

   Vero $\square$ Falso $\bowtie$

   Nel caso sia vero, spiegare brevemente il motivo, nel caso sia falso, dare un controesempio:

   esempio: $F = \mathbb{Q}, K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}), L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$........

6. a) Quanti sono, a meno di isomorfismi, i gruppi abeliani di ordine 5625?.....10......

   b) Elencarne almeno due non isomorfi tra loro:
   $C_{3^2} \times C_{5^4} = C_{5625}, \quad C_3 \times C_3 \times C_{5^4}$......