ALGEBRA 2
prof. Valentina Barucci
15 settembre 2014

1. Consideriamo il polinomio

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Sia $E$ il campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$. Allora

$$[E : \mathbb{Q}] = \text{................}$$

La fattorizzazione di $f(x)$ in fattori lineari su $E$ è:

..............................

$$\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) = \text{...............}$$

Soluzione: f(x) è il quinto polinomio ciclotomico, quindi irriducibile su $\mathbb{Q}$. Risulta $[E : \mathbb{Q}] = 4$, la fattorizzazione su $E$ è data $\prod_{i=1}^{4}(x - \zeta^i)$, dove $\zeta$ è una radice primitiva quinta dell'unità. Inoltre $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong U(\mathbb{Z}_5) = C_4$.

2. Consideriamo il polinomio

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

e sia $E_i$ il campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{Z}_i$, dove $i = 2, 5$.

$$[E_2 : \mathbb{Z}_2] = \text{................}$$

La fattorizzazione di $f(x)$ in fattori lineari su $E_2$ è:

..............................

$$\mathrm{Gal}(E_2/\mathbb{Z}_2) = \text{..............}$$

$$[E_5 : \mathbb{Z}_5] = \text{................}$$

La fattorizzazione di $f(x)$ in fattori lineari su $E_5$ è:

..............................

$$\mathrm{Gal}(E_5/\mathbb{Z}_5) = \text{..............}$$

Soluzione: $f(x)$ è irriducibile anche su $\mathbb{Z}_2$, $[E_2 : \mathbb{Z}_2] = 4$, $\mathrm{Gal}(E_2/\mathbb{Z}_2) = C_4$. Se $\alpha$ è una radice di $f(x)$,

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \alpha^2)(\alpha - \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha - 1)(x - \alpha^3)$$

infatti applicando l'automorfismo di Frobenius $\psi$, otteniamo $\psi(\alpha) = \alpha^2$, $\psi^2(\alpha) = \alpha^4 = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$ e $\psi^3(\alpha) = \alpha^8 = \alpha^3$.

Infine su $\mathbb{Z}_5$ $f(x) = (x + 4)^4$, quindi $[E_5 : \mathbb{Z}_5] = 1$ e il gruppo di Galois è banale.

3. Consideriamo l'estensione $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{25} + 1/2, \sqrt[3]{5}, 2 + 3i)$. Allora

   $[K : \mathbb{Q}] = 6$

   K è un'estensione normale di $\mathbb{Q}$: vero $\bowtie$ falso $\square$

   K è un'estensione semplice di $\mathbb{Q}$: vero $\bowtie$ falso $\square$

   Nel caso in cui $K$ è un'estensione semplice di $\mathbb{Q}$, un elemento primitivo è

$$\sqrt[3]{5} + i$$

4. Consideriamo i gruppi ciclici $C_2 = \langle a \rangle$, $C_3 = \langle b \rangle$ e $C_9 = \langle c \rangle$. Elencare tutti gli elementi di ordine sei in

$$C_2 \times C_3 \times C_9$$

   ..............................

   Indicare tra questi due elementi distinti che generano lo stesso sottogruppo di $C_2 \times C_3 \times C_9$

   ............................

   Soluzione: gli elementi di ordine sei sono: $(a, b, 1), (a, b^2, 1), (a, 1, c^3), (a, 1, c^6)$, $(a, b, c^3), (a, b, c^6), (a, b^2, c^3), (a, b^2, c^6)$ e ad esempio i primi due generano lo stesso sottogruppo.

5. a) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ è un elemento algebrico di grado 16 su $\mathbb{Q}$, allora $\alpha$ è sempre costruibile con riga e compasso: vero $\square$ falso $\bowtie$.

   b) Con riga e compasso è possibile dividere un segmento in sette parti uguali: vero $\bowtie$ falso $\square$.

   c) Con riga e compasso è possibile dividere un segmento in cinque parti uguali: vero $\bowtie$ falso $\square$.

6. a) I $p$-sottogruppi di Sylow di un gruppo di ordine 216 sono gruppi dei seguenti ordini:

$$8, \quad 27$$

b) Un gruppo di ordine 216 è sempre prodotto diretto dei suoi $p$-sottogruppi di Sylow: vero $\square$ falso $\bowtie$ (ad esempio il diedrale $D_{108}$)

c) Un gruppo abeliano di ordine 216 è sempre prodotto diretto dei suoi $p$-sottogruppi di Sylow: vero $\bowtie$ falso $\square$.

d) Un gruppo abeliano finito è sempre prodotto diretto dei suoi $p$-sottogruppi di Sylow: vero $\bowtie$ falso $\square$.