ALGEBRA 2
prof. Valentina Barucci
2 settembre 2014

1. Il polinomio $x^{15} - x^9 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ ha radici multiple. Vero $\square$ Falso $\bowtie$

   Il polinomio $x^{25} - x \in \mathbb{Q}[x]$ ha radici multiple. Vero $\square$ Falso $\bowtie$

   Il polinomio $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 \in \mathbb{Q}[x]$ ha radici multiple. Vero $\bowtie$ Falso $\square$

   Due polinomi irriducibili e distinti di $\mathbb{Q}[x]$ non hanno mai radici in comune. Vero $\bowtie$ Falso $\square$

   Due polinomi irriducibili e distinti di $K[x]$, dove K è un campo finito, non hanno mai radici in comune. Vero $\bowtie$ Falso $\square$

2. Sia E il campo di spezzamento di $f(x) = 1/2x^4 - 5x^2 + 1/2 \in \mathbb{Q}[x]$. Allora:

   $$[E : \mathbb{Q}] = ...4.....$$

   La fattorizzazione in fattori lineari di $f(x)$ su E è:

   $$(x + (\sqrt{2} + \sqrt{3}))(x - (\sqrt{2} + \sqrt{3}))(x + (\sqrt{2} - \sqrt{3}))(x - (\sqrt{2} - \sqrt{3}))$$

   $\mathrm{Gal}(E, \mathbb{Q}) \cong ....V...$ (gruppo di Klein)

   I campi intermedi, M, $\mathbb{Q} \subseteq M \subseteq E$ sono:
   $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$,

3. Sia ζ una radice primitiva p-esime dell'unità, dove p è un primo dispari. Allora:

   ζ è algebrico su $\mathbb{Q}$ di grado ......$p - 1$.....

   $\zeta + \zeta^{-1}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$ di grado ....$(p - 1)/2$.......

   $\zeta\zeta^{-1}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$ di grado .....1......

   ζ/ζ^{-1} è algebrico su $\mathbb{Q}$ di grado......$p - 1$........

4. a) Costruire, se esiste, un omomorfismo non banale dal gruppo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ al gruppo ciclico C_4 (disegnando delle frecce):

$(\bar{0}, \bar{0})$	e
$(\bar{0}, \bar{1})$	g
$(\bar{1}, \bar{0})$	g^2
$(\bar{1}, \bar{1})$	g^3

   Soluzione: ad esempio possiamo mandare $\{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})\}$ in e e $\{(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}$ in g^2

   b) Scrivere il numero degli omomorfismi da $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ al gruppo ciclico C_4 (compreso quello banale): ...4...

5. Ogni p-gruppo G, $G \neq C_p$, ha un sottogruppo normale non banale.
   Vero $\bowtie$ Falso $\square$

   Il gruppo alterno A_6 ha un sottogruppo normale non banale.
   Vero $\square$ Falso $\bowtie$

   Sia H un sottogruppo di un gruppo G. Se due elementi di G sono coniugati in G, allora lo sono anche in H. Vero $\square$ Falso $\bowtie$

   Sia H un sottogruppo di un gruppo G. Se due elementi di G sono coniugati in H, allora lo sono anche in G. Vero $\bowtie$ Falso $\square$

   Per ogni primo p, nel gruppo diedrale D_p tutti gli elementi di ordine due sono coniugati tra loro. Vero $\bowtie$ Falso $\square$

6. Sia $C_9 = \langle g \rangle$ il gruppo ciclico di ordine nove. Scrivere gli elementi di $\mathrm{Aut}(C_9)$, il gruppo degli automorfismi di C_9:

$$U(\mathbb{Z}_9) \cong \mathrm{Aut}(C_9) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8; \text{dove } \alpha_i : g \to g^i\} \cong C_6$$

   $\mathrm{Aut}(C_9)$ è prodotto diretto di due suoi sottogruppi propri H e K.
   Vero $\bowtie$ Falso $\square$. In caso affermativo, sono:

   $H = \{\alpha_1 = id, \alpha_8\}$

   $K = \{\alpha_1 = id, \alpha_4, \alpha_7\}$