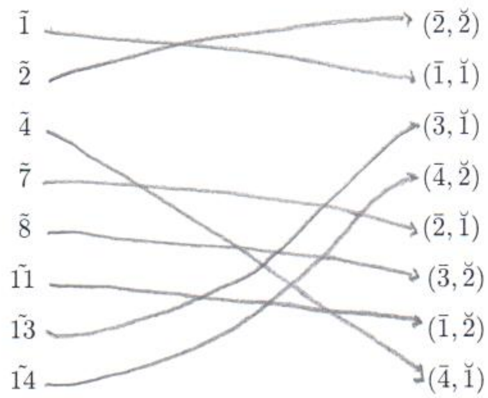
ALGEBRA 2

prof. Valentina Barucci

11 luglio 2014

1. Dati i gruppi moltiplicativi $U(\mathbb{Z}_5) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$, $U(\mathbb{Z}_3) = \{\breve{1}, \breve{2}\}$, $U(\mathbb{Z}_{15}) = \{\tilde{1}, \tilde{2}, \dots\}$ costruire un isomorfismo tra $U(\mathbb{Z}_{15})$ e $U(\mathbb{Z}_5) \times U(\mathbb{Z}_3)$ disegnando delle frecce:



2. Elencare le classi di coniugio del gruppo diedrale $D_5 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$

   Soluzione: $\{e\}$, $\{r, r^4\}$, $\{r^2, r^3\}$, $\{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$

3. Elencare tutti i gruppi abeliani di ordine 540 non isomorfi tra loro.

   Soluzione: visto che $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$, abbiamo:
   $C_4 \times C_{27} \times C_5$, $C_4 \times C_9 \times C_3 \times C_5$, $C_4 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_5$,
   $C_2 \times C_2 \times C_{27} \times C_5$, $C_2 \times C_2 \times C_9 \times C_3 \times C_5$, $C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_5$,

4. Un campo finito è sempre algebricamente chiuso vero $\square$ falso $\bowtie$
   Un campo finito non è mai algebricamente chiuso vero $\bowtie$ falso $\square$
   Un campo finito può essere, soltanto in alcuni casi, algebricamente chiuso vero $\square$ falso $\bowtie$

5. Sia K il campo di spezzamento di x^4+1 su $\mathbb{Q}$, allora

$$[K:\mathbb{Q}] = \quad .....4.......$$

Posto $\alpha = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$, una base di K su $\mathbb{Q}$ è ad esempio
$\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ oppure $\{1, i, \sqrt{2}, i\sqrt{2}\}$
Il gruppo di Galois $\mathrm{Gal}_{f(x)}$ è:

...............$U(\mathbb{Z}_8) \cong V$(gruppo di Klein)............................

I campi intermedi tra $\mathbb{Q}$ e K sono

$\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$

6. Riconoscere nella seguente lista gli anelli tra loro isomorfi (ed unirli con un tratto di matita):

$\mathbb{Q}(1+i)$ $\quad \mathbb{Q}[x]/(x^2+x+2)$ $\quad \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+1)$ $\quad \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+x+2)$

$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ $\quad \mathbb{Q}[x]/(x^2+1)$ $\quad \mathbb{Z}_3[x]/(x^2-1)$ $\quad \mathbb{Q}[x]/(x^2-1)$