ALGEBRA 2
prof. Valentina Barucci
20 giugno 2014

1. Costruire un omomorfismo non banale dal gruppo simmetrico S_3 al ciclico $C_6 = \langle g \rangle$ di ordine 6, disegnando delle frecce:

id	e
(12)	g
(13)	g^2
(23)	g^3
(123)	g^4
(132)	g^5

   Soluzione: l'unico omomorfismo non banale è quello che manda id, (123) e (132) in e e le trasposizioni in g^3.

2. Il gruppo V di Klein è prodotto semidiretto di due sottogruppi propri vero $\bowtie$ falso $\square$

   S_3 è prodotto semidiretto di due sottogruppi propri vero $\bowtie$ falso $\square$

   Il gruppo Q delle unità dei quaternioni è prodotto semidiretto di due sottogruppi propri vero $\square$ falso $\bowtie$

   Per ogni $n \geq 3$, il gruppo diedrale D_n è prodotto semidiretto di due sottogruppi propri vero $\bowtie$ falso $\square$

   Il gruppo ciclico C_{17} è prodotto semidiretto di due sottogruppi propri vero $\square$ falso $\bowtie$

3. Sia G un gruppo di ordine 325. Allora:

   G è sempre un gruppo ciclico vero $\square$ falso $\bowtie$

   G è sempre un gruppo abeliano vero $\bowtie$ falso $\square$

   Trovare, se esistono, due gruppi non isomorfi tra loro di ordine 325:

   $C_{25} \times C_{13}$ e $C_5 \times C_5 \times C_{13}$

   Per vedere che G è sempre abeliano basta applicare i teoremi di Sylow e ricordare che un gruppo di ordine p^2 (5^2 .nel nostro caso) è sempre abeliano.

4. Sia K il campo di spezzamento di $x^n - 1 \in \mathbb{Q}[x]$, con $n \geq 3$. Allora:

   (a) Esiste sempre almeno un campo L, $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq K$, con $[L : \mathbb{Q}] = 2$
   vero $\bowtie$ falso $\square$

   infatti (scrivere due righe per motivare la risposta):

   $K = \mathbb{Q}(\zeta)$, con ζ radice primitiva n-esima dell'unità e $\mathrm{Gal}(K, \mathbb{Q}) \cong U(\mathbb{Z}_n)$, che è un gruppo abeliano di ordine $\phi(n)$, che è pari per ogni $n \geq 3$. Se ne deduce che $\mathrm{Gal}(K, \mathbb{Q})$ contiene sempre un sottogruppo H di indice 2 (attenzione! indice e non ordine). Questo si vede grazie al teorema di struttura dei gruppi abeliani finiti, oppure facendo uso del punto successivo. Per la corrispondenza di Galois troviamo quindi sempre un'estensione di grado 2 di $\mathbb{Q}$ contenuta in K

   (b) Se $n \geq 3$ è un numero primo, esiste sempre esattamente un campo L, $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq K$, con $[L : \mathbb{Q}] = 2$ vero $\bowtie$ falso $\square$

   infatti (scrivere due righe per motivare la risposta):

   Si ragiona come sopra, utilizzando in più il fatto che se $n = p$ è primo, allora $U(\mathbb{Z}_p)$ è un gruppo ciclico che possiede uno e un solo sottogruppo di ordine $\phi(p)/2$, ovvero di indice 2.

5. Trovare per quali dei seguenti valori di n, il poligono regolare con n lati è costruibile con riga e compasso:

   $n = 25$: costruibile $\square$ non costruibile $\bowtie$

   $n = 32767400$: costruibile $\square$ non costruibile $\bowtie$

   $n = 560$: costruibile $\square$ non costruibile $\bowtie$

   $n = 544$: costruibile $\bowtie$ non costruibile $\square$

   $n = 91234$: costruibile $\square$ non costruibile $\bowtie$

6. Sia K il campo di spezzamento di $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$ su $\mathbb{Z}_5$, allora

   $$[K : \mathbb{Z}_5] = \quad ......2.....$$

   Denotata con α una radice di $f(x)$ tale che $\alpha^2 = 2$, una base di K su $\mathbb{Z}_5$ è

   $$\{........1, \alpha...\}$$

   La fattorizzazione di $f(x)$ in fattori lineari su K (in funzione di α) è:

   $$(x - \alpha)(x + \alpha)(x - 2 - 3\alpha)(x - 2 + 3\alpha)$$

   Il gruppo di Galois $\mathrm{Gal}_{f(x)}$ è ....C_2..........

Per la soluzione bisogna osservare che $f(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - 2)$ in $\mathbb{Z}_5[x]$ e aggiungendo una radice di uno dei fattori irriducibili (si indicava nel testo una radice del secondo fattore), si aggiungono automaticamente anche tutte le altre.