ALGEBRA 2. Seconda prova di esonero
prof. Valentina Barucci
12 giugno 2014

1. Sia K il campo di spezzamento di $f(x) = x^4 + 2x^3 + x + 1$ su $\mathbb{Z}_3$, allora

$$[K : \mathbb{Z}_3] = \quad ....$$

Denotata con α una radice di $f(x)$, una base di K su $\mathbb{Z}_3$ è

{...}

La fattorizzazione di $f(x)$ in fattori lineari su K è:

....

Soluzione: Il polinomio è irriducibile e $[K : \mathbb{Z}_3] = 4$, infatti in $K = \mathbb{Z}_3(\alpha)$ il polinomio possiede tutte e quattro le radici, $\alpha, \psi(\alpha) = \alpha^3, \psi^2(\alpha) = \alpha^9 = \alpha^3 - \alpha^2 + 1, \psi^3(\alpha) = \alpha^{27} = \alpha^3 + \alpha^2 - \alpha$

Ogni polinomio $g(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ di grado ≤ 4 si spezza in fattori lineari in $K[x]$: vero $\square$ falso $\bowtie$

Ogni polinomio $g(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ di grado ≤ 2 si spezza in fattori lineari in $K[x]$: vero $\bowtie$ falso $\square$

2. Sia ζ una radice primitiva ottava dell'unità.

(a) Il gruppo di Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta), \mathbb{Q})$ è isomorfo a:
C_4 $\square$ C_8 $\square$ C_6 $\square$ V $\bowtie$ S_3 $\square$

(b) Scrivere a fianco di ognuno dei seguenti elementi di $\mathbb{Q}(\zeta)$ il corrispondente grado di algebricità su $\mathbb{Q}$:

$\alpha = \zeta^3 + \zeta$ 2

$\beta = \zeta^2 + \zeta$ 4

$\gamma = \zeta^3 + \zeta^7 + \zeta^8$ 1

3. Dati gli anelli

$$\mathbb{Z}_5(\alpha) \cong \mathbb{Z}_5[x]/(x^2 - x + 1) \quad \text{e} \quad \mathbb{Z}_5(\beta) \cong \mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + x + 1)$$

allora tra i due anelli:

Esiste un isomorfismo σ_1 tale che $\sigma_1(\alpha) = \beta$ vero $\square$ falso $\bowtie$

Esiste un isomorfismo σ_2 tale che $\sigma_2(\alpha) = -\beta$ vero $\bowtie$ falso $\square$

Esiste un isomorfismo σ_3 tale che $\sigma_3(\alpha) = 1 + \beta$ vero $\bowtie$ falso $\square$

I due anelli non sono isomorfi $\square$

Soluzione: infatti $-\beta$ e $1 + \beta$ annullano il polinomio $x^2 - x + 1$.

4. Sia K il campo di spezzamento di $x^6 - 9$ su $\mathbb{Q}$. Allora

$$[K : \mathbb{Q}] = \quad .....6.......$$

Il gruppo di Galois $G = \mathrm{Gal}(K, \mathbb{Q})$ è: ....S_3...........

G non ha sottogruppi di indice 2 vero $\square$ falso $\bowtie$

G ha un sottogruppo di indice 2 e il campo intermedio corrispondente

è ....$\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$............ (riempire solo nel caso in cui esiste)

G non ha sottogruppi di indice 4 vero $\bowtie$ falso $\square$

G ha un sottogruppo di indice 4 e il campo intermedio corrispondente

è .... (riempire solo nel caso in cui esiste)

5. Un'estensione di grado 2 di un campo è sempre un'estensione normale:

   vero $\bowtie$ falso $\square$

   Un'estensione di grado pari di un campo è sempre un'estensione normale:

   vero $\square$ falso $\bowtie$

   Un'estensione di grado 2 di un campo è sempre un'estensione radicale:

   vero $\square$ falso $\bowtie$

   (infatti non abbiamo escluso che il campo sia un campo infinito a caratteristica 2)

   Il polinomio $x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ è risolubile per radicali:

   vero $\bowtie$ falso $\square$

   Il polinomio $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ è risolubile per radicali:

   vero $\bowtie$ falso $\square$

   Il polinomio $x^6 - 15x^4 + 5x \in \mathbb{Q}[x]$ è risolubile per radicali:

   vero $\square$ falso $\bowtie$