ESERCIZI DI ALGEBRA 2
prof. Valentina Barucci
22 maggio 2014

1. (Esercizio riproposto: utilizzare un esercizio dell' 8 maggio, Foglio n. 7) Mostrare l'isomorfismo di anelli
$$\mathbb{Q}[x]/(x^n - 1) \cong \prod_{d|n} \mathbb{Q}(\zeta_d)$$
dove $\prod$ indica il prodotto diretto e ζ_d una radice primitiva d-esima dell'unità.

2. Sia $F \subset K$ un'estensione di campi finita e normale (ovvero di Galois). Dato un campo intermedio L, $F \subseteq L \subseteq K$, dimostrare che l'estensione $F \subset L$ è normale se e soltanto se $\sigma(L) = L$, per ogni $\sigma \in \mathrm{Gal}(K, F)$.

3. a) Trovare il campo di spezzamento E di
$$f(x) = (x^4 - 5x^2 + 6)(x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x + 2)$$
su $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

   b) Scrivere inoltre la fattorizzazione in fattori lineari di $f(x)$ in $E[x]$, una base di E come spazio vettoriale su F e una base di E come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.

   c) Trovare il gruppo di Galois $G = \mathrm{Gal}(E, F)$ e descrivere la corrispondenza di Galois in questo caso.

   d) Descrivere l'azione del gruppo G sulle otto radici di $f(x)$.

4. Sia K il campo di spezzamento di un polinomio $f(x) \in F[x]$ (F campo) con radici tutte distinte. Dimostrare che l'azione del gruppo di Galois $\mathrm{Gal}(K, F)$ sulle radici di $f(x)$ è transitiva (cioè c'è una sola orbita) se e soltanto se $f(x)$ è irriducibile su F.

5. Per ognuno dei seguenti polinomi, a coefficienti nei rispettivi campi, trovare il campo di spezzamento, scrivere la fattorizzazione in fattori lineari e descrivere la corrispondenza di Galois.

   $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ su $\mathbb{Z}_2$

   $x^4 + x^2 + 1$ su $\mathbb{Z}_2$

6. Stabilire se esiste un campo con 4096 elementi e in caso affermativo trovare tutti i suoi sottocampi.

7. Dimostrare che i fattori irriducibili di $x^{p^n} - x \in \mathbb{F}_p[x]$ sono tutti e soli i polinomi irriducibili di $\mathbb{F}_p[x]$ di grado d, dove d divide n.