

## ESERCIZI DI ALGEBRA 2

prof. Valentina Barucci

15 maggio 2014

1. Siano  $F \subseteq K$  campi ed  $\alpha, \beta \in K$  elementi algebrici di grado 3 su  $F$ . Stabilire quali sono i valori possibili per  $[F(\alpha, \beta) : F]$ , dando un esempio per ognuno di essi.
2. Dimostrare che se  $\alpha$  è un elemento algebrico di grado dispari su un campo  $F$ , allora  $F(\alpha) = F(\alpha^2)$
3. Stabilire se gli anelli

$$\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 2x + 2) \quad \text{e} \quad \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$$

sono isomorfi e, in caso affermativo, esplicitare un isomorfismo.

4. Sia  $K$  un campo con quattro elementi e sia  $\alpha \in K$ ,  $\alpha \neq 0, 1$ . Trovare il campo di spezzamento  $E$  di

$$f(x) = x^2 + \alpha x + 1$$

su  $K$ . Scrivere inoltre la fattorizzazione in fattori lineari di  $f(x)$  in  $E[x]$ , una base di  $E$  come spazio vettoriale su  $K$  e una base di  $E$  come spazio vettoriale su  $\mathbb{Z}_2$ .

5. Stabilire le relazioni di inclusione tra i seguenti sottocampi di  $\mathbb{C}$ :

$$\mathbb{Q}(i), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{3}), \quad \mathbb{Q}(i\sqrt{3}), \quad \mathbb{Q}(i + \sqrt{3}), \quad \mathbb{Q}(i, \sqrt{3})$$

6. Data un'estensione di campi  $F \subseteq K$ , indichiamo con  $\text{Aut}(F, K)$  il gruppo degli  $F$ -automorfismi di  $K$  (ovvero degli automorfismi  $\phi$  di  $K$  tali che  $\phi(a) = a$ , per ogni  $a \in F$ ). Costruire i seguenti gruppi di automorfismi:

$$\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i), \mathbb{Q}), \quad \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i), \mathbb{Q}(i)), \quad \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}), \mathbb{Q})$$

7. Mostrare l'isomorfismo di anelli

$$\mathbb{Q}[x]/(x^n - 1) \cong \prod_{d|n} \mathbb{Q}(\zeta_d)$$

dove  $\prod$  indica il prodotto diretto e  $\zeta_d$  una radice primitiva  $d$ -esima dell'unità.