PRIMO ESONERO DI ALGEBRA 2
prof. Valentina Barucci
28 aprile 2014

1. Riconoscere nella seguente lista i gruppi tra loro isomorfi ed unirli con un tratto di matita (V indica il gruppo di Klein e $\mathrm{Int}(G), \mathrm{Aut}(G), Z(G)$ indicano rispettivamente il gruppo degli automorfismi interni, il gruppo degli automorfismi e il centro di un gruppo G):

   $\mathrm{Int}(S_3)$ $\quad D_6/Z(D_6)$ $\quad Z(D_6)$ $\quad \mathrm{Aut}(C_7)$

   $\mathrm{Aut}(V)$ $\quad C_3 \times C_2$ $\quad \mathrm{Aut}(S_3)$ $\quad \mathrm{Int}(C_7)$

   Soluzione. Si hanno i seguenti isomorfismi:

   $\mathrm{Aut}(V) \cong \mathrm{Int}(S_3) \cong \mathrm{Aut}(S_3) \cong D_6/Z(D_6)$ (tutti isomorfi a S_3)

   $\mathrm{Aut}(C_7) \cong C_3 \times C_2$

2. Costruire un omomorfismo non banale dal gruppo Q delle unità dei quaternioni al ciclico $C_6 = \langle g \rangle$ di ordine 6, disegnando delle frecce:

1	
-1	e
i	g
$-i$	g^2
j	g^3
$-j$	g^4
k	g^5
$-k$	

   Soluzione. Un omomorfismo non banale è quello che manda $\{1, -1, i, -i\}$ in e e gli altri elementi in g^3.

3. Costruire un omomorfismo non banale dal gruppo ciclico $C_6 = \langle g \rangle$ di ordine 6 al gruppo Q delle unità dei quaternioni, disegnando delle frecce:

   Soluzione. Un omomorfismo non banale è quello che manda $\{e, g^2, g^4\}$ in 1 e gli altri elementi in -1.

4. Scrivere l'equazione delle classi (di coniugio) per D_4 e per A_4:

$$8 = 1 + 1 + 2 + 2 + 2$$

$$12 = 1 + 3 + 4 + 4$$

5. Sia p un numero primo e sia G un p-gruppo che agisce su un insieme X, con $|X| = np + 1$ (per qualche $n \in \mathbb{N}$). Allora:

   Esiste sempre almeno un'orbita con un solo elemento: vero $\bowtie$ falso $\square$

   Esiste sempre una e una sola orbita con un solo elemento:
   vero $\square$ falso $\bowtie$

   Per ogni $x \in X$ lo stabilizzatore di x è un p-gruppo: vero $\bowtie$ falso $\square$

   Esiste sempre almeno un $x \in X$ tale che lo stabilizzatore di x è G:
   vero $\bowtie$ falso $\square$

6. Sia G un gruppo di ordine 153 (o 207). Allora:

   G è sempre un gruppo semplice: vero $\square$ falso $\bowtie$

   G è sempre un gruppo abeliano: vero $\bowtie$ falso $\square$

   G è sempre un gruppo ciclico: vero $\square$ falso $\bowtie$

   G contiene sempre un sottogruppo ciclico di ordine 51 (oppure 69):
   vero $\bowtie$ falso $\square$

7. Sia N un sottogruppo normale di un gruppo finito G e sia $|N| = p^i$, con p primo e $i > 0$. Allora:

   N è contenuto in almeno un p-sottogruppo di Sylow di G:
   vero $\bowtie$ falso $\square$

   N è contenuto in tutti i p-sottogruppi di Sylow di G: vero $\bowtie$ falso $\square$

   N è normale in ogni p-sottogruppo di Sylow di G in cui è contenuto:
   vero $\bowtie$ falso $\square$

8. Sia $G = C_2 \times C_4 \times C_{15}$. Allora:

   In G non ci sono elementi di ordine sei: vero $\square$ falso $\bowtie$

   G ha un solo sottogruppo di ordine sei: vero $\square$ falso $\bowtie$

   G ha due sottogruppi di ordine sei: vero $\bowtie$ falso $\square$

   Ogni sottogruppo di G è normale: vero $\bowtie$ falso $\square$

9. Sia $\Phi : C_3 \to \mathrm{Aut}(V)$ un omomorfismo non banale. Allora il prodotto semidiretto $V \ltimes_\Phi C_3$ è isomorfo a:

   $V \times C_3$ $\square$ A_4 $\bowtie$ D_6 $\square$ $D_6 \times C_3$ $\square$ nessuna delle precedenti $\square$

10. Trovare il polinomio minimo di $-1/2 + i\sqrt{3}/2 + i$ sui rispettivi campi:

    su $\mathbb{R}$: $x^2 + x + 2 + \sqrt{3}$

    su $\mathbb{Q}$: $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$

    su $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$: $x^2 + x + 2 + \sqrt{3}$

    su $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$: $x^2 + (1 - i\sqrt{3})x + 1/2(1 - i\sqrt{3})$

11. Riconoscere nella seguente lista gli anelli tra loro isomorfi (ed unirli con un tratto di matita):

$\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ $\qquad$ $\mathbb{Q}[x]/(x^2+x+1)$ $\qquad$ $\mathbb{Q}(i\sqrt{3}/2)$ $\qquad$ $\mathbb{C}$ $\qquad$ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$\mathbb{R}[x]/(x^2+x+1)$ $\qquad$ $\mathbb{Q}(-1/2+i\sqrt{3}/2)$ $\qquad$ $\mathbb{R}[x]/(x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2})$

Soluzione. Si hanno i seguenti isomorfismi:

$\mathbb{Q}[\sqrt{-3}] \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2+x+1) \cong \mathbb{Q}(i\sqrt{3}/2) \cong \mathbb{Q}(-1/2+i\sqrt{3}/2)$

$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[x]/(x^2+x+1)$

$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \cong \mathbb{R}[x]/(x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2})$