ESERCIZI DI ALGEBRA 2
prof. Valentina Barucci
10 aprile 2014

1. Provare che un ideale principale (a) di un dominio d'integrità D è un ideale primo se e soltanto se a è un elemento primo.

2. Sia $A = \mathbb{R}[x]/I$, dove
$$I = (2x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2,\ x^8 - x^7 + x^6 - x^5)$$
a) Elencare tutti gli ideali dell'anello A con le relative relazioni di inclusione.

   b) Per ogni ideale massimale M di A, descrivere l'anello quoziente A/M.

   c) Stabilire se la classe di $x + 1$ in A è invertibile e, in caso affermativo, trovare l'inverso.

3. Stabilire quali tra i seguenti polinomi sono irriducibili sui rispettivi campi:
$x^7 + 11x^3 + 33x + 22$ su $\mathbb{Q}$.
$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ su $\mathbb{Q}$.
$x^4 + 7$ su $\mathbb{Z}_{17}$.
$x^4 - 6x^2 + 11$ su $\mathbb{R}$.

4. Stabilire se $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sono campi isomorfi.

5. Per ciascuno dei seguenti numeri complessi a, trovare il polinomio minimo di a su $\mathbb{Q}$, determinare $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ e dare esplicitamente una base per $\mathbb{Q}(a)$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.
$$2/3, \quad \sqrt{5} + 2, \quad \sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad 1/2 + i\sqrt{3}/2$$

6. Trovare il polinomio minimo di $\sqrt{2} + i$ su $\mathbb{C}$, su $\mathbb{R}$, su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, su $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$, e su $\mathbb{Q}$.

7. Verificare che $\sqrt{5 + \sqrt{3}}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$, dare una base per $\mathbb{Q}(\sqrt{5 + \sqrt{3}})$, come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e trovare l'inverso di
$$1 - \sqrt{5 + \sqrt{3}}$$
in $\mathbb{Q}(\sqrt{5 + \sqrt{3}})$.

8. Costruire un campo con nove elementi e trovare il gruppo dei suoi automorfismi.

9. Siano $F \subseteq K \subseteq L$ campi, con $[K : F] = n$ e $[L : K] = m$. Se $\{k_1, \ldots, k_n\}$ è un base di K come spazio vettoriale su F e $\{h_1, \ldots, h_m\}$ è un base di L come spazio vettoriale su K, verificare che gli elementi $\{k_i h_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ formano una base di L su F, ovvero generano L come spazio vettoriale su F e sono linearmente indipendenti.