ESERCIZI DI ALGEBRA 2
prof. Valentina Barucci
3 aprile 2014

1. Dimostrare che un gruppo non abeliano di ordine otto è isomorfo a D_4 oppure a Q (gruppo delle unità dei quaternioni).

2. Siano assegnati due gruppi N ed H. Se G è un gruppo tale che N è un sottogruppo normale di G e $G/N \cong H$, allora G è un prodotto semidiretto di N per H. vero $\square$ falso $\square$

3. Sia $\Phi : C_4 \to \mathrm{Aut}(C_3)$ un omomorfismo suriettivo. Costruire il prodotto semidiretto G di C_3 con C_4 tramite Φ. Qual'è l'ordine di G? E' un gruppo abeliano? E' isomorfo a un gruppo diedrale? a un gruppo alterno?

4. Provare che il gruppo delle affinità della retta reale $\mathbb{R}$ (ovvero delle applicazioni $x \to ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) è il prodotto semidiretto del sottogruppo N delle traslazioni ($x \to x + b$) e del sottogruppo H delle omotetie ($x \to ax$).

5. Provare che un gruppo di ordine 130 è risolubile.

6. Mostrare che, se G è un gruppo risolubile, allora esiste una catena di sottogruppi
$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq G_2 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_n = \{e\}$$
tale che per ogni i, $i = 0, \ldots n-1$, G_i/G_{i+1} è ciclico di ordine primo.