ESERCIZI DI ALGEBRA 2
prof. Valentina Barucci
27 marzo 2014

1. Dimostrare che il gruppo moltiplicativo di un campo finito è un gruppo ciclico (cf. l'esercizio n.6 del 19 marzo)

2. Sia G un gruppo di ordine p^n, con p primo e $n \geq 2$. Provare che:

   a) G ha un sottogruppo normale di ordine p^2.

   b) Il numero dei sottogruppi non normali di G è divisibile per p.

3. Dimostrare per induzione che, se $H_1, \ldots, H_n$ sono sottogruppi normali di un gruppo G tali che $H_1 \ldots H_n = G$, $H_i \cap H_1 \ldots H_{i-1} H_{i+1} \ldots H_n = \{e\}$, per $i = 1, \ldots, n$, allora $G \cong H_1 \times \cdots \times H_n$.

4. Dimostrare che se $H \subseteq K$ sono sottogruppi di un gruppo G, allora $[G : K]$ divide $[G : H]$.

5. Stabilire quanti e quali sono i gruppi abeliani (non isomorfi tra loro) di ordine 288.

6. Trovare gli elementi di ordine quattro in

$$C_4 \times C_2 \times C_9 \times C_\infty \times C_\infty$$

   (dove si indica con C_n il gruppo ciclico di ordine n e con C_∞ il gruppo ciclico infinito, $C_\infty \cong \mathbb{Z}$).

7. Trovare i sottogruppi di ordine 4 di $C_6 \times C_7 \times C_8$.

8. Stabilire se i gruppi G_1 e G_2 sono isomorfi

$$G_1 = C_{25} \times C_{27} \times C_3 \times C_{16} \times C_8 \times C_2$$

$$G_2 = C_{10800} \times C_{24} \times C_2$$

9. Dimostrare che ogni gruppo abeliano finito si può scrivere nella forma

$$C_{d_1} \times \cdots \times C_{d_s}$$

   dove d_i divide d_{i-1} per $i = 2, \ldots, s$.