ESERCIZI DI ALGEBRA 2
prof. Valentina Barucci
19 marzo 2014

1. Sia Y un insieme con $p^\alpha m$ elementi, dove p è un primo coprimo con m. Provare che il numero di sottoinsiemi di Y contenenti p^α elementi non è un multiplo di p.

2. Trovare i 2-sottogruppi di Sylow e i 3-sottogruppi di Sylow di S_4 e stabilire se qualcuno di questi è un sottogruppo normale di S_4.

3. Ripetere l'esercizio precedente prendendo A_4 al posto di S_4.

4. Un gruppo si dice semplice se non possiede sottogruppi normali non banali. Utilizzando i teoremi di Sylow, dimostrare che:

   a) un gruppo di ordine 1000 non è mai semplice.

   b) un gruppo di ordine $2p^n$, con p primo dispari, non è mai semplice.

   c) un gruppo di ordine 99 è sempre abeliano.

5. Scrivere l'equazione delle classi per A_5.

6. a) (per chi si sente bravo) Dimostrare che se un gruppo finito G ha al più un sottogruppo per ogni divisore del suo ordine allora è un gruppo ciclico (suggerimento: sia x un elemento di ordine massimo in G. Mostrare che, per ogni $y \in G$, l'ordine di y divide l'ordine di x.)

   b) (per tutti) Utilizzando il punto a), dimostrare che un sottogruppo finito di $K \setminus \{0\}$, dove K è un campo, è un gruppo ciclico.