ESERCIZI DI ALGEBRA 2
prof. Valentina Barucci
12 marzo 2014

1. Ricordando che il gruppo di Klein V è il gruppo delle simmetrie del rettangolo, che il gruppo diedrale D_4 è il gruppo delle simmetrie del quadrato e che il gruppo alterno A_4 è il gruppo delle simmetrie di rotazione del tetraedro, trovare nel gruppo $SO_3(\mathbb{R})$ (matrici 3×3 speciali ortogonali a coefficienti reali) dei sottogruppi isomorfi rispettivamente a V, D_4, A_4.

2. Trovare i sottogruppi di S_4 isomorfi a D_4. Quanti sono? Sono dei sottogruppi normali di S_4?

3. Riconoscere nella seguente lista i gruppi tra loro isomorfi (ed unirli con un tratto di matita):

   $\mathrm{U}(\mathbb{Z}_{21})$ $\qquad$ D_6 $\qquad$ $\mathrm{Aut}(C_{13})$

   $C_3 \times C_4$ $\qquad$ $C_2 \times C_6$

4. a) In un gruppo ciclico non possono esserci due elementi distinti di ordine due. vero $\square$ falso $\square$

   b) Un gruppo ciclico finito ha un solo elemento di ordine d, per ogni divisore d dell'ordine del gruppo. vero $\square$ falso $\square$

   c) Per ogni $n > 2$, in $\mathrm{U}(\mathbb{Z}_n)$ c'è almeno un elemento di ordine due.

   vero $\square$ falso $\square$

5. Elencare (a meno di isomorfismi) tutti i gruppi di ordine ≤ 7.

6. Trovare il gruppo degli automorfismi interni di G, dove

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$$

7. Sia G un gruppo abeliano ed H il sottoinsieme degli elementi di G di ordine finito. Dimostrare che H è un sottogruppo di G. Trovare il sottogruppo degli elementi di ordine finito nel gruppo moltiplicativo $\mathbb{C}^*$ dei numeri complessi non nulli.

8. Consideriamo l'azione del gruppo $O_2(\mathbb{R})$ delle matrici ortogonali 2×2 a coefficienti reali su $\mathbb{R}^2$. Trovare orbita e stabilizzatore per $(0, 0)$ e per $(1, 0)$.

9. Consideriamo l'azione del gruppo A_4 su l'insieme $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Trovare orbita e stabilizzatore per $x = 1$.

10. Dimostrare che se G è un gruppo con sole due classi di coniugio, allora $G \cong C_2$.
11. Dimostrare che il centro del gruppo diedrale D_n ha ordine 1 o 2, a seconda che n sia pari o dispari.
12. Dimostrare che se p è primo, $p > 2$, allora gli elementi di ordine 2 del gruppo diedrale D_p sono tutti nella stessa classe di coniugio.