ESERCIZI DI ALGEBRA 2
prof. Valentina Barucci
5 marzo 2014

1. Trovare le classi di coniugio del gruppo simmetrico S_7.

2. Esistono elementi di ordine 12 in S_{10}? Che struttura ciclica hanno?

3. Determinare l'ordine dell'elemento $2/3$ in $\mathbb{Q}$ e in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ rispettivamente. Esistono in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ elementi di ordine infinito?

4. a) Trovare l'ordine di tutti gli elementi di $U(\mathbb{Z}_{15})$ (il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{15}$).

   b) Stabilire se $U(\mathbb{Z}_{15})$ è ciclico.

   c) Trovare tutti i sottogruppi di $U(\mathbb{Z}_{15})$.

5. Data la proiezione canonica $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{18}$, esplicitare la corrispondenza biunivoca tra i sottogruppi di $\mathbb{Z}$ contenenti $18\mathbb{Z}$ e tutti i sottogruppi di $\mathbb{Z}_{18}$.

6. Consideriamo in A_4 i seguenti sottoinsiemi:

   $$B = \{id, (12)(34)\},\ C = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},\ D = \{id, (123)\}$$

   Stabilire se B, C e D sono sottogruppi e se sono sottogruppi normali di A_4 . Quando possibile, studiare il gruppo quoziente.

7. Consideriamo il sottogruppo normale N di A_4

   $$N = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

   Sia $\pi : A_4 \to A_4/N$ la proiezione canonica e sia H il sottogruppo di A_4 generato da (123).

   a) calcolare $\pi^{-1}(\pi(H))$.

   b) verificare che risulta $\pi^{-1}(\pi(H)) = HN$

   c) verificare il primo teorema di isomorfismo, $H/H \cap N = HN/N$.

8. Elencare tutti i sottogruppi normali del gruppo diedrale D_4 e i relativi gruppi quoziente.

9. Dimostrare che in un gruppo abeliano di ordine dispari l'applicazione che manda ogni elemento nel proprio quadrato è un automorfismo.

10. Dimostrare che se G è un gruppo finito ed H un sottogruppo di G di indice 2, allora H contiene tutti gli elementi di ordine dispari di G.

11. a) Costruire tutti i possibili omomorfismi $f : S_3 \to V$, dove V è il gruppo di Klein.

    b) Stabilire se il gruppo V di Klein è un' immagine omomorfa di S_3.

12. Dimostrare che, per ogno gruppo G, il gruppo $\mathrm{Int}(G)$ degli automorfismi interni di G è un sottogruppo normale del gruppo $\mathrm{Aut}(G)$ di tutti gli automorfismi di G.

13. Trovare il gruppo degli automorfismi di D_4, $\mathrm{Aut}(D_4)$, il gruppo degli automorfismi interni di D_4, $\mathrm{Int}(D_4)$ e il gruppo quoziente $\mathrm{Aut}(D_4)/\mathrm{Int}(D_4)$.

14. Trovare un gruppo G tale che $\mathrm{Int}(G) = \mathrm{Aut}(G)$.

15. Stabilire quali dei seguenti gruppi sono prodotto diretto di due o più sottogruppi propri: D_6, A_4, $\mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_{16}$, $\mathbb{Z}_{30}$.

16. Trovare i gruppi delle simmetrie di rotazione del tetraedro e del cubo.