Esercizi da svolgere e consegnare in forma scritta (anche scritti a mano, ma con scrittura chiara) entro il 9 gennaio
Si accettano lavori di gruppo (al massimo quattro persone)

1. Caratterizzare gli ideali monomiali primari e gli ideali monomiali irriducibili di un anello di polinomi $K[X_1, \ldots, X_n]$.

2. Siano I, J ideali omogenei (rispetto alla $\mathbb{Z}^d$-graduazione) di un anello di semigruppo $K[S]$, dove $S \subseteq \mathbb{Z}^d$ è un semigruppo affine. Ponendo $\log I = \{s \in S \mid \mathbf{t}^s \in I\}$, mostrare che:

   I è un ideale irriducibile se e soltanto se $\log I$ è un ideale di semigruppo irriducibile.

3. Caratterizzare gli ideali omogenei irriducibili e gli ideali omogenei primari di un anello di semigruppo $K[S]$, dove S è un semigruppo numerico.

4. Dato il semigruppo affine $S = \langle (0,1), (3,2), (5,2) \rangle \subset \mathbb{N}^2$, trovare nell'anello di semigruppo $K[S]$ una decomposizione in ideali irriducibili per l'ideale principale generato da $\mathbf{t}^{(3,2)}$.

5. (a) Sia A un anello artiniano di ideali massimali $m_1, \ldots, m_n$. Mostrare che, se $(m_1 \ldots m_n)^h = 0$, allora $A/m_i^h \cong A_{m_i}$

   (b) Mostrare che $\mathbb{R}[X]/(X^5 + X^3)$ è artiniano ed esprimerlo come prodotto diretto di sue localizzazioni.

6. Determinare la serie di Hilbert e il polinomio di Hilbert per la K-algebra graduata standard $K[X,Y]/(X^2Y^7, X^7Y^2)$.

7. Siano $a_1, \ldots a_s \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Determinare la serie di Hilbert per $K[X_1, \ldots, X_s]$, avendo posto $\deg X_i = a_i$.

8. Sia A un anello e m un suo ideale massimale. Mostrare che i due anelli graduati associati $G_m(A)$ e $G_{mA_m}(A_m)$ sono isomorfi.

9. Sia $A = K[X^{n_1}, \ldots, X^{n_s}]$, con $S = \langle n_1, \ldots, n_s \rangle$ $(n_1 < \cdots < n_s)$ semigruppo numerico e sia m l'ideale massimale $(X^{n_1}, \ldots, X^{n_s})$. Dimostrare che:

   (a) Per $n >> 0$, $\dim_K(m^n/m^{n+1}) = n_1$;

   (b) Nell'anello graduato associato $G_m(A)$ tutti gli elementi omogenei di grado ≥ 1 sono divisori dello zero se e soltanto se l'elemento omogeneo di grado uno $X^{n_1} + m^2 \in m/m^2$ lo è.

10. Calcolare la funzione di Hilbert $H(A,n) = \dim_K(m^n/m^{n+1})$, la serie di Hilbert $\sum_{n=0}^{\infty} H(A,n)t^n$ e la dimensione di Krull per i seguenti anelli locali:

    $K[[X^4, X^5, X^{11}]], \quad K[[X^4, X^5, X^{11}]]/(X^4),$

    $K[[X^4, X^6 + X^7]], \quad K[[X^4, X^6 + X^7]]/(X^4)$

(In tutti gli esercizi K è un campo)