Esercizi da svolgere e consegnare in forma scritta (anche scritti a mano, ma con scrittura chiara) entro il 19 novembre
Si accettano lavori di gruppo (al massimo quattro persone)

1. Ricordiamo che nell'anello $k[[t]]$ delle serie formali di potenze a coefficienti in un campo k, l'ordine di una serie $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$ è il più piccolo i tale che $a_i \neq 0$. Consideriamo il sottoanello $A = k[[t^5, t^7]]$ di $k[[t]]$ (anello locale di ideale massimale $m = (t^5, t^7)$). Mostrare che:

   a) ogni insieme formato da quattro serie di A di ordini 15,17,19,21 è un insieme minimale di generatori per m^3. E' vero che, viceversa, ogni insieme minimale di generatori per m^3 ha ordini 15,17,19,21?

   b) esprimere A come anello quoziente dell'anello $k[[X, Y]]$.

2. Sia A un anello di interi di un campo quadratico, ovvero sia A la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, d intero privo di fattori quadratici. Dimostrare che A è uno $\mathbb{Z}$-modulo libero di rango 2.

3. Sia $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid 3x + 4y + 5z = 0\}$.

   a) Verificare che L è un sottogruppo di $\mathbb{Z}^3$, trovare dei generatori per L e calcolare $\mathbb{Z}^3/L$.

   b) Detto ψ l'omomorfismo suriettivo $\mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3/L$, verificare che $\psi(\mathbb{N}^3)$ è un semigruppo affine, descrivere l'anello di semigruppo $K[S]$ (dove K è un campo) come quoziente di un anello di polinomi e determinarne la dimensione di Krull.

   c) Provare a enunciare e dimostrare qualcosa che generalizzi questo esempio.

4. Trovare la normalizzazione dei seguenti semigruppi affini contenuti in $\mathbb{N}^2$: $S_1 = \langle (0, 1), (3, 2), (5, 2) \rangle$ ed $S_2 = \langle (0, 1), (4, 2), (6, 2) \rangle$

   [Ricordiamo che , se S è un semigruppo affine e G è il suo gruppo quoziente, la normalizzazione (o chiusura integrale) di S è $\bar{S} = \{g \in G \mid ng \in S, \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}, n > 0\}$]

5. Mostrare che l'ideale di un semigruppo S generato da $s_1, \dots, s_n$ (ovvero il più piccolo ideale di S contenente $s_1, \dots, s_n$) è $\cup_{i=1}^n (s_i + S)$.

6. Siano I, J ideali omogenei di un anello di semigruppo $K[S]$. Ponendo $\log I = \{s \in S \mid \mathbf{t}^s \in I\}$, mostrare che:

   (a) $\log I$ è un ideale del semigruppo S.

   (b) $I \subset J$ se e soltanto se $\log I \subset \log J$, $\log(I \cap J) = \log I \cap \log J$, $\log I + J = \log I \cup \log J$.

   (c) I è un ideale primo (o radicale o primario) se e soltanto se $\log I$ è un ideale di semigruppo primo (o radicale o primario).

7. Sia F una faccia di in semigruppo affine S. Mostrare che:

   (a) $S - F = \{s - f; f \in F\}$ è un semigruppo affine.

   (b) $\Sigma = \{\mathbf{t}^f; f \in F\}$ è un sottoinsieme moltiplicativo di $K[S]$.

(c) L'anello di semigruppo $K[S-F]$ coincide con l'anello di frazioni $\Sigma^{-1}K[S]$ ovvero con la localizzazione di $K[S]$ nell'ideale primo omogeneo generato dai monomi $\mathbf{t}^s$ con $s \in S \setminus F$.

8. Dimostrare che se K è un campo e se S_1, S_2 sono semigruppi allora

$$K[S_1 \oplus S_2] \cong K[S_1] \otimes_K K[S_2]$$

come K-algebre.

9. Sia A un dominio d'integrità con campo dei quozienti K ed M un A-modulo. Dimostrare che:

(a) $K \otimes_A M \cong K \otimes_A (M/M_{tor})$, dove M_{tor}è il sottomodulo di torsione di M.

(b) $K \otimes_A M = 0$ se e soltanto se M è un modulo di torsione.

10. Stabilire se $\mathbb{Q}(i) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(i)$ è un dominio d'integrità.