DIARIO DELLE LEZIONI DI ALGEBRA SUPERIORE

a.a. 2013/2014

I settimana

Richiami di teoria degli anelli, nel caso di anelli commutativi unitari (ideali primi e massimali, omomorfismi, quozienti, teorema cinese del resto,...). Radicale di un ideale. Radicale di Jacobson e nilradicale. Anelli locali e anelli di serie formali. Anelli noetheriani. Il teorema della base di Hilbert.

Esercizio in sospeso: dimostrare che

$$A = \{q + a_1X + \cdots + a_nX^n; q \in \mathbb{Q}, a_i \in \mathbb{R}\}$$

è un anello non noetheriano.

II settimana

Moduli liberi di rango n, moduli finitamente generati, moduli ciclici. Teorema di Hamilton Cayley per moduli finitamante generati. Lemma di Nakayama e sue conseguenze per gli ideali di un anello locale. Anelli di semigruppo: definizione ed esempi. Elementi interi su un anello (definizione e analogie/differenze con gli elementi algebrici su un campo).

Esercizi da rivedere:

1. Ricordiamo che nell'anello $k[[t]]$ delle serie formali di potenze a coefficienti in un campo k, l'ordine di una serie $a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots$ è il più piccolo i tale che $a_i \neq 0$. Consideriamo il sottoanello $A = k[[t^5, t^7]]$ di $k[[t]]$ (anello locale di ideale massimale $m = (t^5, t^7)$). Mostrare che:

   a) ogni insieme formato da quattro serie di A di ordini 15,17,19,21 è un insieme minimale di generatori per m^3.

   b) esprimere A come anello quoziente dell'anello $k[[X, Y]]$.

2. Sia S il sottosemigruppo di $\mathbb{N}^2$ generato da $(5, 2), (0, 1), (3, 2)$. Esprimere l'anello di semigruppo $k[S]$ come quoziente di $k[X, Y, Z]$.

3. Ricordiamo che un semigruppo numerico è un sottosemigruppo di $\mathbb{N}$ contenente 0 e con complemento $\mathbb{N} \setminus S$ finito. Il numero di Frobenius di un semigruppo numerico è il più grande intero n tale che $n \notin S$. Dimostrare che:

   a) $a_1, \ldots a_\nu \in \mathbb{N}$ generano un semigruppo numerico se e soltanto se $\mathrm{MCD}(a_1, \ldots a_\nu) = 1$.

   b) Il numero di Frobenius di un semigruppo numerico generato da due elementi, $S = \langle a, b\rangle$, è $ab - (a + b)$.

III settimana

Estensioni intere di anelli. Chiusura integrale e anelli integralmente chiusi. Anelli di interi algebrici come esempi di anelli integralmente chiusi. Anelli e moduli di frazioni. Per gli anelli di semigruppo:

Dato un semigruppo additivo $(S, +)$ con zero (ovvero un monoide) commutativo, cancellativo e finitamente generato, allora S è un sottosemigruppo di un gruppo abeliano finitamente generato, ovvero di un gruppo

$$G \cong \bigoplus_{i=1}^{m} (Z/h_i\mathbb{Z}) \bigoplus \mathbb{Z}^d$$

Se S è generato da $s_1, \ldots, s_\nu$, allora si ha un omomorfismo suriettivo di semigruppi

$$\psi : \mathbb{N}^\nu \to S$$

e $S \cong \mathbb{N}^\nu/\sigma$, dove σ è la congruenza su $\mathbb{N}^\nu$ così definita: $\alpha\sigma\beta \Leftrightarrow \psi(\alpha) = \psi(\beta)$. Inoltre ψ induce l'omomorfismo di anelli $\phi : K[X_1, \ldots, X_\nu] \to K[S]$, ottenuto ponendo $\phi(X_i) = \mathbf{t}^{\mathbf{s_i}}$. L'*ideale torico* I_S dell'anello di semigruppo $K[S]$ è per definizione il nucleo dell'omomorfismo ϕ.

Abbiamo visto che

1. I_S è generato da binomi $\mathbf{X}^\alpha - \mathbf{X}^\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^\nu$ e tali che $\alpha\sigma\beta$.

2. $K[S]$ è un dominio d'integrità (ovvero l'ideale torico I_S è primo) se e soltanto se S è un sottosemigruppo di $\mathbb{Z}^d$, ovvero il gruppo G è libero.

Per questi argomenti (che verranno approfonditi) cf. ad esempio il capitolo 7 di E. Miller, B. Sturmfels, Combinatorial Commutative Algebra, Springer 2005 o R. Villarreal, Monomial Algebras, Pure and Applied Mathematics Series, n. 238, 2001.

Esercizi:

1. Sia A un anello di interi di un campo quadratico, ovvero sia A la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, d intero privo di fattori quadratici. Dimostrare che A è uno $\mathbb{Z}$-modulo libero di rango 2.

2. Studiare l'anello totale delle frazioni di $K[X]/(f)$, dove K è un campo $f \in K[X]$.

3. Sia m un ideale massimale di un anello A. Dimostrare che, se $r < n$ si ha il seguente isomorfismo di A-moduli:

$$m^r/m^n \cong (mA_m)^r/(mA_m)^n$$

IV settimana

Richiami: Ogni sottomodulo del modulo libero di rango n su un PID (PID = dominio a ideali principali) è libero di rango $\leq n$. In particolare ogni sottogruppo del gruppo abeliano libero di rango n (ovvero $\mathbb{Z}^n$) è libero di rango $\leq n$. Teorema di struttura per i moduli finitamente generati su un PID (in particolare teorema di struttura per i gruppi abeliani finitamente generati).

Semigruppi affini, coni di $\mathbb{R}^d$ e coni razionali. Relazione con i semigruppi affini: Lemma di Gordan. Definizione di semigruppi affini normali.

Altre proprietà delle estensioni intere di anelli (INC, LO, GU). Dimensione di Krull di un anello.

Esercizi:

1. Sia $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid 3x + 4y + 5z = 0\}$.

   a) Verificare che L è un sottogruppo di $\mathbb{Z}^3$, trovare dei generatori per L e calcolare $\mathbb{Z}^3/L$.

   b) Detto ψ l'omomorfismo suriettivo $\mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3/L$, verificare che $\psi(\mathbb{N}^3)$ è un semigruppo affine, descrivere l'anello di semigruppo $K[S]$ (dove K è un campo) come quoziente di un anello di polinomi e determinarne la dimensione di Krull.

   c) Provare a enunciare e dimostrare qualcosa che generalizzi questo esempio.

2. Trovare la normalizzazione dei seguenti semigruppi affini contenuti in $\mathbb{N}^2$: $S_1 = \langle (0,1), (3,2), (5,2) \rangle$ ed $S_2 = \langle (0,1), (4,2), (6,2) \rangle$

   [Ricordiamo che , se S è un semigruppo affine e G è il suo gruppo quoziente, la normalizzazione (o chiusura integrale) di S è $\bar{S} = \{g \in G \mid ng \in S$, per qualche $n \in \mathbb{N}, n > 0\}$]

3. Stabilire quali delle seguenti estensioni di anelli sono estensioni intere e determinare la dimensione di Krull di tutti gli anelli che vi compaiono:

   $\mathbb{Q} + X\mathbb{Q}(\sqrt{2})[X] \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})[X]$

   $\mathbb{Q} + X\bar{\mathbb{Q}}[X] \subset \bar{\mathbb{Q}}[X]$ (dove $\bar{\mathbb{Q}}$ è la chiusura algebrica di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$)

   $\mathbb{Q} + X\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{R}[X]$

   $\mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{Q}[X]$

AVVISO: per la parte sui semigruppi affini vedere anche il libro di Bruns e Herzog, aggiunto in bibliografia. Alcune pagine fotocopiate di questo libro possono essere ritirate in portineria.

V settimana

Moduli noetheriani. Anelli e moduli graduati. Sottomoduli graduati (o omogenei) e passaggio della graduazione al quoziente. Omomorfismi graduati. K-algebre graduate standard. Un anello graduato $R = \oplus_{i \in \mathbb{N}} R_i$ è noetheriano se e soltanto se R_0 è noetheriano e R è una R_0-algebra finitamente generata.

Un semigruppo affine positivo (o a punta) ha un unico insieme minimale di generatori. S è un semigruppo affine normale se e soltanto se l'anello di semigruppo $K[S]$ è normale. $K[S]$ è in modo naturale $\mathbb{Z}^d$- graduato e gli ideali omogenei rispetto a questa graduazione sono gli ideali generati da monomi.

Ideali, ideali primi e facce di un semigruppo affine. Corrispondenza biunivoca tra le facce del cono razionale generato da un semigruppo affine S e gli ideali primi omogenei di $K[S]$ (qualcosa di questo è lasciato per esercizio).

Localizzazioni di anelli di semigruppo in ideali primi omogenei (qualcosa per esercizio).

Esercizi:

1. Mostrare che l'ideale di un semigruppo S generato da $s_1, \ldots, s_n$ (ovvero il più piccolo ideale di S contenente $s_1, \ldots, s_n$) è $\cup_{i=1}^{n}(s_i + S)$.

2. Siano I, J ideali omogenei di un anello di semigruppo $K[S]$. Ponendo $\log I = \{s \in S \mid \mathbf{t}^s \in I\}$, mostrare che:

   (a) $\log I$ è un ideale del semigruppo S.

   (b) $I \subset J$ se e soltanto se $\log I \subset \log J$, $\log(I \cap J) = \log I \cap \log J$, $\log I + J = \log I \cup \log J$.

   (c) I è un ideale primo (o radicale o primario) se e soltanto se $\log I$ è un ideale di semigruppo primo (o radicale o primario).

3. Sia F una faccia di in semigruppo affine S. Mostrare che:

   (a) $S - F = \{s - f; f \in F\}$ è un semigruppo affine.

   (b) $\Sigma = \{\mathbf{t}^f; f \in F\}$ è un sottoinsieme moltiplicativo di $K[S]$.

   (c) L'anello di semigruppo $K[S - F]$ coincide con l'anello di frazioni $\Sigma^{-1}K[S]$ ovvero con la localizzazione di $K[S]$ nell'ideale primo omogeneo generato dai monomi $\mathbf{t}^s$ con $s \in S \setminus F$.

VI settimana

Esistenza e unicità del prodotto tensoriale tra A-moduli. Esempi e proprietà del prodotto tensoriale. Prodotti tensoriali di k-algebre. Lemma di normalizzazione di Noether. La dimensione di Krull di un dominio affine come grado di trascendenza del suo campo dei quozienti sul campo base. In particolare dimensione di Krull di un anello di semigruppo affine. Moduli piatti.

VII settimana

Le lezioni sono sospese per le prove in itinere. Si richiede agli studenti la soluzione scritta degli esercizi proposti, da consegnare entro il 19 novembre (cf. Esercitazione, sulla pagina del corso).

VIII settimana

Teorema degli zeri di Hilbert (forma debole e forma forte). Ogni k-algebra finitamente generata è un anello di Jacobson. L'anello delle coordinate di una varietà affine. Spettro primo e massimale di un anello. La topologia di Zariski.

Esercizi:

1. Sia $V \times W$ il prodotto cartesiano di due varietà affini, $V \subset \mathbb{A}^n(k)$ e $W \subset \mathbb{A}^m(k)$. Mostrare che:

   a) $V \times W$ è una varietà affine in $\mathbb{A}^{n+m}(k)$

   b) Per i rispettivi anelli delle coordinate si ha:

   $$k[V \times W] \cong (k[V] \otimes_k k[W])_{\text{red}}$$

   [Per un anello A, indichiamo con A_{red} l'anello A quozientato il suo nilradicale Rad(0)]

2. Mostrare che una varietà irriducibile reale $V \subset \mathbb{R}^n$ è connessa nella topologia di Zariski, ma può non essere connessa nella usuale topologia di $\mathbb{R}^n$. Dare un esempio.

3. Sia A un anello semilocale (ovvero con un numero finito di ideali massimali). Mostrare che A è un anello di Jacobson se e soltanto se la sua dimensione di Krull è zero.

4. Sia $\phi : A \to B$ un omomorfismo di anelli. Mostrare che l'applicazione $\phi^* : \mathrm{Spec}B \to \mathrm{Spec}A$, definita ponendo $\phi^*(P) = \phi^{-1}(P)$, per ogni ideale primo P di B è un'applicazione continua di spazi topologici (la topologia nei due spettri è la topologia di Zariski).

IX settimana

Commento all'esercitazione scritta svolta. Ideali primari e ideali irriducibili. Decomposizione primaria di un ideale e ideali primi associati. Teorema di intersezione di Krull.

Esercizi:

1. Sia $I = (m_1, \ldots, m_h)$ un ideale di $K[X_1, \ldots, X_n]$ generato dai monomi $m_1, \ldots, m_h$.

   Mostrare che

   a) se $m_1 = X_1^{e_1} \ldots X_n^{e_n}$, allora
   $$I = (X_1^{e_1}, \ldots, m_h) \cap \cdots \cap (X_1^{e_n}, \ldots, m_h)$$

   b) con il procedimento in a) si ottiene una decomposizione primaria per l'ideale I

2. Caratterizzare gli ideali monomiali primari e gli ideali monomiali irriducibili di un anello di polinomi $K[X_1, \ldots, X_n]$.

3. Determinare due diverse decomposizioni primarie per l'ideale
   $$I = (XYZ^2, XY^2) \subset K[X, Y, Z]$$
   indicando quali sono i primi isolati.

4. Siano I, J ideali omogenei (rispetto alla $\mathbb{Z}^d$-graduazione) di un anello di semigruppo $K[S]$, dove $S \subseteq \mathbb{Z}^d$ è un semigruppo affine. Ponendo $\log I = \{s \in S \mid \mathbf{t}^s \in I\}$, mostrare che:

   I è un ideale irriducibile se e soltanto se $\log I$ è un ideale di semigruppo irriducibile.

5. Caratterizzare gli ideali omogenei irriducibili e gli ideali omogenei primari di un anello di semigruppo $K[S]$, dove S è un semigruppo numerico.

6. Dato il semigruppo affine $S = \langle (0,1), (3,2), (5,2) \rangle \subset \mathbb{N}^2$, trovare nell'anello di semigruppo $K[S]$ una decomposizione in ideali irriducibili per l'ideale principale generato da $\mathbf{t}^{(3,2)}$.

X settimana

Unicità delle componenti primarie relative a primi isolati in ogni decomposizione primaria minimale. Esempi di ideali irriducibili in semigruppi affini e in anelli di semigruppi affini. Serie di composizione e moduli di lunghezza finita. Anelli di valutazione discreta e domini di Dedekind (cenni). Anelli e moduli artiniani. Teorema di caratterizzazione degli anelli artiniani come noetheriani zero-dimensionali. Ogni anello artiniano è prodotto diretto finito di anelli artiniani locali.

Esercizi:

1. Sia A un anello artiniano di ideali massimali $m_1, \dots, m_n$. Mostrare che, se $(m_1 \dots m_n)^h = 0$, allora $A/m_i^h \cong A_{m_i}$
2. Mostrare che $\mathbb{R}[X]/(X^5 + X^3)$ è artiniano ed esprimerlo come prodotto diretto di sue localizzazioni.
3. Sia A un anello ed M un A-modulo di lunghezza finita. Mostrare che, se $I \subseteq \mathrm{Ann}(M)$ allora la lunghezza di M come A-modulo coincide con la lunghezza di M come A/I-modulo.
4. Dimostrare che, se (A, m) è un dominio locale uno-dimensionale noetheriano, con $A/m = k$ allora le seguenti condizioni sono equivalenti:
   (a) A è un anello di valutazione discreta;
   (b) A è integralmente chiuso;
   (c) m è un ideale principale;
   (d) $\dim_k m/m^2 = 1$

XI settimana

Additività della lunghezza di moduli. La funzione di Hilbert. Teorema di Hilbert-Serre per un modulo graduato $M = \oplus_{n=0}^{\infty} M_n$ finitamente generato su un anello graduato noetheriano $R = \oplus_{n=0}^{\infty} R_n = R_0[x_1, \dots, x_s]$ con R_0 artiniano. Forma standard della serie di Hilbert. Il polinomio di Hilbert (che descrive, nel caso $\deg x_i = 1$, per ogni i, la funzione di Hilbert $H(M, n) = l_{R_0}(M_n)$, per $n >> 0$). L'anello $G_I(A)$, graduato associato all'anello A rispetto all'ideale I. Il caso geometrico: interpretazione del graduato associato come anello delle coordinate del cono tangente.

Esercizi (in tutti gli esercizi K è un campo):

1. Determinare la serie di Hilbert e il polinomio di Hilbert per le K-algebre graduate standard:
   $K[X, Y, Z]/(X^2, Y^2, XZ)$
   $K[X, Y, Z]/(X^2, YZ, XZ)$
   $K[X, Y, Z]/(XY, XZ, YZ)$
2. Siano $a_1, \dots a_s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Determinare la serie di Hilbert per $K[X_1, \dots, X_s]$, avendo posto $\deg X_i = a_i$.

3. Sia A un anello e m un suo ideale massimale. Mostrare che i due anelli graduati associati $G_m(A)$ e $G_{mA_m}(A_m)$ sono isomorfi.

4. Mostrare che in $G_m(A)$, dove A è l'anello di semigruppo $K[X^4, X^5, X^{11}]$ ed $m = \langle X^4, X^5, X^{11}\rangle$, tutti gli elementi omogenei di grado ≥ 1 sono divisori dello zero.

XII settimana

Funzioni di tipo polinomiale. Teoria della dimensione per un anello locale noetheriano (A, m): $\dim A = d(A) = \delta(A)$, dove $\dim A$ è la dimensione di Krull dell'anello, $d(A)$ è il grado della funzione di tipo polinomiale $l_A(A/Q^n)$ (con Q ideale m-primario) e $\delta(A)$ è il minimo numero di generatori per un ideale m-primario.

Esercizi (in tutti gli esercizi K è un campo):

1. Dimostrare che se $F(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una funzione di tipo polinomiale di grado d (ovvero, per $n >> 0$, $F(n) = f(n)$, con $f(n) \in \mathbb{Q}[n]$ e $\deg f = d$) allora $\Delta F(n) := F(n+1) - F(n)$ è una funzione polinomiale di grado $d-1$.

2. Sia $A = K[X^{n_1}, \ldots, X^{n_s}]$, con $S = \langle n_1, \ldots, n_s\rangle$ ($n_1 < \cdots < n_s$) semigruppo numerico e sia m l'ideale massimale $(X^{n_1}, \ldots, X^{n_s})$. Dimostrare che:

   (a) Per $n >> 0$, $\dim_K(m^n/m^{n+1}) = n_1$;

   (b) Nell'anello graduato associato $G_m(A)$ tutti gli elementi omogenei di grado ≥ 1 sono divisori dello zero se e soltanto se l'elemento omogeneo di grado uno $X^{n_1} + m^2 \in m/m^2$ lo è.

3. Calcolare la funzione di Hilbert $H(A, n) = \dim_K(m^n/m^{n+1})$, la serie di Hilbert $\sum_{n=0}^{\infty} H(A, n)t^n$ e la dimensione di Krull per i seguenti anelli locali:

   $K[[X^4, X^5, X^{11}]], \quad K[[X^4, X^5, X^{11}]]/(X^4),$

   $K[[X^4, X^6 + X^7]], \quad K[[X^4, X^6 + X^7]]/(X^4)$

XIII e XIV settimana

Alcuni corollari alla teoria della dimensione per anelli locali noetheriani, il teorema dell'ideale principale di Krull e il teorema dell'ideale principale generalizzato, la dimensione di A/xA è di uno inferiore alla dimensione di A (se A è locale noetheriano e x è un non zero divisore di A). Anelli locali regolari e loro graduato associato. Un anello locale regolare è un dominio d'integrità.

Correzione e commento alla seconda esercitazione scritta. Anelli uno dimensionali analiticamente irriducibili e loro graduato associato. Curve algebroidi (secondo Zariski) e semigruppo numerico associato.

Esercizi

1. Utilizzando il teorema dell'ideale principale generalizzato di Krull, dimostrare che, se I è un ideale di $K[X_1, \dots, X_n]$ generato da h elementi, allora la dimensione dell'anello $K[X_1, \dots, X_n]/I$ è $\geq n - h$.

2. Dimostrare che, se (A, m) è un anello noetheriano locale e Q è un ideale m-primario, allora Q è irriducibile se e soltanto se

$$\dim_{A/m}((Q : m)/Q) = 1$$

3. Dimostrare che, se $A = K[[f_1, f_2]] \subset K[[X]]$ è una curva algebroide piana, allora nel graduato associato $G_m(A)$ esiste un elemento omogeneo di grado uno che non è zero divisore.