14. I.NEWTON : i concetti fondamentali del Calcolo Infinitesimale

Data la complessità tecnica dell'argomento, introdurremo i brani in cui Newton espone i concetti fondamentali del calcolo, con una dettagliata spiegazione.

Come osserva lo storico A.Koyré nei suoi "Studi newtoniani" (Ed. Einaudi, 1972), la geometrizzazione del mondo fisico implica una matematica in cui "Le curve e le figure non risultano costituite da diversi elementi geometrici, non vengono formate nello spazio dall'intersezione di corpi e piani geometrici, e neppure rappresentano un'immagine spaziale delle relazioni strutturali espresse in esse da formule algebriche. Sono invece determinate e descritte dal moto di punti e linee nello spazio".

Newton abbandona quindi una definizione statica (quale quella algebrica Cartesiana) degli enti geometrici per una definizione dinamica. Questa concezione delle grandezze geometriche come generate da moti continui, e quindi tutte dipendenti dal tempo — piuttosto che come aggregati di elementi infinitesimi — é alla base del "Methodus fluxionum et seriarum infinitarum" (1671). In quest'opera si introducono i concetti di fluente e di flussione; fluente é una quantità generata da un moto continuo: si pensi ad un'area che si accresce nel tempo, oppure alla curva descritta dal moto di un punto, ecc. Flussione é la velocità con cui é generata la fluente. Il problema del calcolo é impostato nei seguenti termini: data una relazione tra fluenti x, y, trovare la relazione fra le rispettive flussioni x', y'.

Cerchiamo di illustrare cosa ciò significhi con un esempio: consideriamo due grandezze x e y, che variano nel tempo (cioé due fluenti) e supponiamo che valga tra di loro, istante per istante, la seguente relazione $y=x^2$; vogliamo ora calcolare, seguendo il metodo di Newton, la relazione esistente fra le rispettive flussioni.

Sia o un intervallo di tempo infinitamente piccolo; in questo intervallo la fluente x si accresce del prodotto ox' e la fluente y di oy'. Siccome la relazione tra le fluenti vale istante per istante, si ha:

$y + ox' =(x + ox')^2$, quindi

$y + oy' = x^2 + o^2x^2 + 2oxx'$, e poiché $y =x^2$

$y' = 2xx' + ox^2$

considerando adesso o come una quantità nulla, si ottiene la relazione fra flussioni $y' = 2xx'$. Vediamo ora come Newton, nel suo successivo "Tractatus de quadratura curvarum" (1704) — in cui, come vedremo, introduce in modo diverso i concetti del calcolo — definisce i concetti di fluente e di flussione (1).

Considero in questo lavoro le grandezze matematiche non come costituite di parti piccole a piacere, ma come generate da un moto continuo. Le linee vengono descritte non mediante addizioni di parti, ma per moto continuo di punti; le superfici per moto di linee; i solidi per moto di superficie; gli angoli per rotazione dei loro lati; i tempi per flusso continuo e così in altri casi analoghi.

Queste generazioni hanno veramente luogo in natura, e si osservano ogni giorno nel movimento dei corpi. In questo modo gli antichi indicarono le generazioni del rettangolo come descritto da un segmento mobile perpendicolare ad un segmento fisso. Considerando dunque che quantità generate, crescendo in tempi uguali riescono maggiori o minori secondo la velocità maggiore o minore con cui crescono, ho cercato un metodo per determinare le grandezze dalle velocità dei moti o degli incrementi con cui si generano; chiamando flussioni queste velocità di accrescimento, e fluenti le quantità generate, giunsi a poco a poco negli anni 1665 e 1666 al metodo delle flussioni, del quale qui faccio uso nella quadratura delle curve (2).

Le flussioni si possono considerare con approssimazione arbitrariamente grande come gli incrementi delle fluenti, generati durante intervalli uguali di tempo piccoli a piacere; in modo più preciso sono direttamente proporzionali agli incrementi istantanei delle fluenti, e si possono poi rappresentare mediante linee qualsiasi ad esse proporzionali.

Occorre sottolineare come alla concezione delle grandezze geometriche come composte da indivisibili — gli infinitesimi — si sia sostituito l'uso di un unico infinitesimo, l'intervallo elementare di tempo. Peraltro si trascurano, come si é visto nell'esempio precedente, i termini contenenti l'infinitesimo o, senza giustificazione, e cioé considerando alla fine dei calcoli, o come uno zero effettivo.

L'infinitamente piccolo interviene quindi ancora nel metodo delle flussioni, ma sotto una forma dinamica, invece che come un indivisibile statico nel senso di Cavalieri. Nel già citato "Tractatus de quadratura curvarum" si dispiega il tentativo dell'abbandono della prima ed ultima ragione (3).

Spieghiamo in cosa consista questo metodo riprendendo l'esempio delle fluenti x e y legate dalla relazione $y = x^2$. Sia o un intervallo di tempo finito. In questo intervallo x si incrementa di ox' nel tempo in cui la quantità x, fluendo, diventa x + ox', la quantità $y = x^2$ diventa $(x + ox')^2 = x^2 + 2oxx' + o^2x^2$. Pertanto l'incremento subito da y é $(x + ox')^2 - x^2 = 2oxx' + o^2x^2$. Consideriamo ora il rapporto tra l'incremento della x e quello della y, che é:

$$\frac{ox}{2oxx' + o^2x'^2} = \frac{1}{2x + ox'}$$

Sottolineiamo che il rapporto é tra quantità finite e non infinitesime (si ricordi che o é finito). Si consideri ora il valore che tale rapporto assume quando o é uguale a zero. Esso é 1/2x ed é detto ultima ragione , perché é l'ultimo della successione di rapporti numerici che si ottengono per valori di o decrescenti verso lo zero. Ma é detto anche prima ragione, perché é il primo della successione di rapporti numerici crescenti a partire dallo zero. Si apre in tal modo la strada al concetto moderno di "derivata" (flussione).

Nel brano che segue Newton illustra i motivi dell'abbandono del concetto di indivisibile. Il brano é tratto dai "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" (ed. citata p.152 e segg.).

Col metodo degli indivisibili le dimostrazioni sono rese più brevi. Ma poiché l'ipotesi degli invisibili é ardua, e poiché questo metodo é stimato meno geometrico, ho preferito ridurre le dimostrazioni delle cose seguenti alle prime e ultime somme e ragioni di quantità evanescenti e nascenti (4), ossia ai limiti delle somme e ragioni, e permettere, perciò, il più brevemente possibile, le dimostrazioni di quei limiti [...]. Perciò se nel seguito mi capiterà di considerare le quantità come costituite da particelle determinate, e mi capiterà di prendere segmenti curvilinei come retti, vorrò significare non particelle indivisibili, ma divisibili evanescenti, non somme e ragioni di parti determinate, ma sempre limiti di somme e ragioni, e la forza di tali dimostrazioni si richiamerà sempre al metodo dei lemmi precedenti.

Si obietta che non esiste l'ultimo rapporto di quantità evanescenti, in quanto esso, prima che le quantità siano svanite non é l'ultimo, e allorché sono svanite non c'é affatto. Ma con lo stesso ragionamento si può giustamente sostenere che non esiste la velocità ultima di un corpo che giunga in un certo luogo, dove il moto finisce. La velocità, infatti, prima che un corpo giunga nel luogo non é l'ultima, e quando vi giunge non c'é. La risposta é facile: per velocità ultima si intende quella con la quale il moto cessa, né dopo, ma proprio nel momento in cui vi giunge: ossia, quella stessa velocità con la quale il corpo giunge al luogo ultimo e con la quale il moto cessa.

Similmente, per ultime ragioni di quantità evanescenti si deve intendere il rapporto delle quantità non prima di diventare nulle e non dopo, ma quello col quale si annullano. Parimenti, anche la prima ragione delle quantità nascenti é il rapporto col quale nascono. E la prima e ultima somma é quella con cui iniziano e cessano di essere (ossia di essere aumentate e di essere diminuite). Esiste un limite che la velocità alla fine del moto può raggiungere, ma non superare. Questa é l'ultima velocità. E un identico limite é il rapporto di tutte le quantità e proprozioni incipienti ed evanescenti.

E poiché questo limite é certo e definito, il problema di determinarlo é veramente geometrico. In quanto, tutto ciò che é geometrico può essere assunto legittimamente per determinare e dimostrare gli altri problemi geometrici.

Si può anche obiettare che se vengono date le ultime ragioni delle quantità evanescenti, saranno date anche le ultime grandezze, e in tal modo ogni quantità sarà costituita da indivisibili, contro quanto Euclide dimostrò circa gli incommensurabili nel decimo libro degli Elementi. Questa obiezione, però, si basa su una falsa ipotesi. Le ultime ragioni con cui quelle quantità si annullano non sono in realtà le ragioni delle ultime quantità, ma i limiti ai quali le ragioni si possono avvicinare per più di qualunque differenza data, e che, però, non possono mai superare, né toccare prima che le quantità siano diminuite all'infinito.

La cosa si capisce più chiaramente nell'infinitamente grande. Se due quantità, delle quali é data la differenza, vengono aumentate all'infinito, sarà data la loro ultima ragione, soprattutto la ragione di euguaglianza, e tuttavia, non saranno date le quantità ultime o massime delle quali questa é la ragione. Nel seguito, allorché per essere capite facilmente, menzionerò le quantità minime o evanescenti o ultime, non bisognerà supporre che si tratti di quantità di determinata grandezza, ma bisognerà pensare sempre a quantità che diminuiscono illimitatamente.

Note

1) Il brano che segue é tratto da: G.Castelnuovo, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna* , Feltrinelli, Milano, 1962.

2) Si tratta del calcolo dell'area compresa fra la curva e una porzione dell'asse delle ascisse. La quadratura (cioé in linguaggio moderno, l'integrazione) si dimostra essere l'operazione inversa di quella di derivazione (cioé del calcolo della flussione).

3) Dal latino "prima et ultima ratio", dove "ratio", di solito tradotto con "ragione", sta per rapporto.

4) Evanescenti, significa essere decrescenti verso lo zero, e nascenti per crescenti dallo zero.