

# Corso di geometria (per fisici)

ANNO ACCADEMICO 2009/2010

## Programma del corso

- **Preliminari.**
  - Insiemi e funzioni.  
Relazioni di equivalenza e quozienti.
  - Numeri e operazioni.
  - Numeri complessi: forma polare e interpretazione geometrica.
  - Principio di induzione.
- **Spazi vettoriali numerici.**
  - Vettori applicati e vettori liberi.
  - Matrici come applicazioni lineari fra spazi vettoriali numerici.
  - Composizione e prodotto di matrici.
  - Rango di una matrice. Matrici invertibili.
  - Matrici simmetriche e antisimmetriche.  
Matrici (strettamente) triangolari e diagonali.
- **Sistemi di equazioni lineari.**
  - Metodo di eliminazione di Gauss e riduzione a scala.
  - Matrici quadrate elementari e calcolo dell'inversa.
  - Interpretazione geometrica.
  - Sottospazi affini.  
Equazioni parametriche e cartesiane.
- **Spazi vettoriali.**
  - Spazi, sottospazi e quozienti.
  - Combinazioni lineari.
  - Intersezione, somma e somma diretta di sottospazi.

- Basi e dimensione. Formula di Grassmann.
- Applicazioni lineari. Nucleo e immagine.
- Il gruppo  $GL_n$ .
- **Cambiamenti di base.**
  - Spazio vettoriale duale. Basi e basi duali. Spazio biduale.
  - Matrice associata ad un'applicazione lineare.
  - Matrice di cambiamento di base.
  - Duale di un'applicazione lineare e matrice trasposta.
  - Annullatore di un sottospazio vettoriale.
- **Determinanti.**
  - Rapporti di volumi e determinante di una matrice.
  - Permutazioni e segno di una permutazione.
  - Esistenza ed unicità del determinante (di un endomorfismo).
  - Teorema di Laplace.
  - Teorema di Binet.
  - Calcolo dell'inversa di una matrice.
  - Il gruppo  $SL_n$ .
- **Autovalori e autovettori.**
  - Autovalori, autovettori, autospazi.
  - Polinomi, fattorizzazione, ideali e massimo comun divisore. Teorema fondamentale dell'algebra.
  - Polinomio caratteristico, teorema di Cayley-Hamilton e polinomio minimo.
  - Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore.
  - Criterio di diagonalizzabilità e criterio di triangolabilità per un endomorfismo.

- **Prodotti scalari e geometria euclidea.**
  - Prodotti scalari, forme quadratiche.  
Rappresentazione in coordinate.
  - Basi ortogonali e proiezioni ortogonali.  
Riflessioni.
  - Prodotti scalari definiti positivi.  
Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.
  - I gruppi  $O_n$  e  $SO_n$ .
  - Angoli, distanze, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.
  - Aggiunto di un endomorfismo.
  - Spazi affini, gruppo delle affinità e gruppo delle isometrie affini.
  - Sottogruppi finiti di  $SO_2(\mathbb{R})$ .
  - $\mathbb{R}^3$  e il prodotto vettore.  
Sottogruppi finiti di  $SO_3(\mathbb{R})$  e poliedri regolari.
  
- *Tempo permettendo.*
  - Segnatura di un prodotto scalare su  $\mathbb{R}$  e teorema di Sylvester.
  - Prodotti hermitiani e gruppi unitari.
  - Teorema spettrale.
  - Prodotti scalari lorentziani.
  - Classificazione metrica e affine delle forme quadratiche.
  - Spazio proiettivo e prospettiva.  
Proiettività e classificazione proiettiva delle quadriche.