Esercizi di geometria - Foglio 7

Corso di Laurea in Fisica

16 Dicembre 2008

15. Applicazioni lineari e affini.

Esercizio 15.1 Dire se le seguenti sono applicazioni lineari o affini:
(giustificare la risposta con una dimostrazione o un controesempio)

(i) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$;

(ii) traslazioni $t_v : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$;

(iii) omotetie $h_{C,\lambda} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$;

(iv) $p_\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *proiezione ortogonale* su un sottospazio (vettoriale o affine) $\sigma \subset \mathbf{R}^n$ (e.g. la proiezione ortogonale su una retta o un piano di $\mathbf{R}^3$);

(v) $R_{C,\vartheta} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *rotazione antioraria di centro* C *ed angolo* $\vartheta \in [0, 2\pi[$;

(vi) $S_\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *riflessione* (detta anche *simmetria ortogonale*) rispetto ad un sottospazio (vettoriale o affine) $\sigma \subset \mathbf{R}^n$ (e.g. la riflessione rispetto ad una retta o ad un piano di $\mathbf{R}^3$);

(vii) $R_{r^+,\vartheta} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la *rotazione antioraria di angolo* ϑ *rispetto alla retta orientata* r^+;

(viii) $\wedge : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ che manda $(X, Y) \mapsto X \wedge Y$;

(ix) $\iota_1 : \mathbf{K}[T] \to \mathbf{K}[T]$, definita da $\iota_1(p(T)) = p(T + 1)$;

(x) $\epsilon_1 : \mathbf{K}[T] \to \mathbf{K}[T]$, definita da $\epsilon_1(p(T)) = p(T) + 1$;

(xi) $Tr : M(n; \mathbf{K}) \to \mathbf{K}$ che manda $A \mapsto Tr(A)$;

(xii) $det : M(3; \mathbf{K}) \to \mathbf{K}$ che manda $A \mapsto det(A)$;

(xiii) ${}^t : M(n; \mathbf{K}) \to M(n; \mathbf{K})$ che manda $A \mapsto A^t$;

(xiv) $l : \mathcal{S}(\mathbf{R}) = \{(a_n) \text{ succ. reali convergenti}\} \to \mathbf{R}$, $l[(a_n)] = \lim_{n\to\infty} a_n$;

(xv) $(df)_{x_0} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita come $(df)_{x_0}(x) = f'(x_0)(x - x_0)$, per $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbf{R})$ fissata (l'applicazione $(df)_{x_0}$ si dice il *differenziale* della funzione f in x_0);

(xvi) $\mathcal{T}^n_{x_0} f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita come $(\mathcal{T}^n_{x_0} f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$, per $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R})$ fissata (l'applicazione $\mathcal{T}^n_{x_0} f$ si dice il *polinomio di Taylor di grado* n della funzione f in x_0);

(xvii) $\mathcal{I}^b_a : \mathcal{C}([a, b], \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ definita come $\mathcal{I}^b_a(f) = \int_a^b f(t)dt$.

(xviii) $\mathcal{Q} : \mathcal{C}^1(I, \mathbf{R}) \to \mathcal{C}^1(I, \mathbf{R})$, $\mathcal{Q}(f) = f^2$;

(xix) $\mathcal{D} : \mathcal{C}^1(I, \mathbf{R}) \to \mathcal{C}(I, \mathbf{R})$, $\mathcal{D}(f) = f'$;

(xx) $\mathcal{E} : \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R}) \to \mathcal{C}(I, \mathbf{R})$, $\mathcal{E}(f) = c_0 f + c_1 f' + c_2 f'' + \cdots + c_n f^{(n)}$ dove i c_i sono numeri reali fissati;

(xxi) $\mathcal{T}^n_{x_0} : \mathcal{C}^n(I, \mathbf{R}) \to \mathcal{C}^\infty(R, \mathbf{R})$, dove $\mathcal{T}^n_{x_0}(f) = \mathcal{T}^n_{x_0} f$ è il polinomio di Taylor di grado n della funzione f in x_0 definito come in (xvi);

(xxii) $\mathcal{I} : \mathcal{C}([a, b], \mathbf{R}) \to \mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$ con $\mathcal{I}(f) = \int_a^x f(t)dt$.

Esercizio 16.1 Per ciascuna delle seguenti applicazioni lineari f, si trovi la matrice associata rispetto alle basi specificate:
(i) $f : \mathbf{R}_{\leq 2}[T] \to \mathbf{R}_{\leq 3}[T]$ data da $f(p(T)) = Tp(T)$, rispetto alle basi $B = \{1, T, T^2\}$, $B' = \{1, T, T^2, T^3\}$;
(ii) $f : \mathbf{R}_{\leq 2}[T] \to \mathbf{R}_{\leq 3}[T]$ come in (i), ma rispetto alle basi $B = \{1, T, T^2\}$, $B' = \{1, T+1, T^2+T+1, T^3+T^2+T+1\}$;
(iii) $f : \mathbf{R}_{\leq 3}[T] \to \mathbf{R}_{\leq 2}[T]$ data da $f(p(T)) = p'(T)$, rispetto alle basi $B = \{1, T, T^2, T^3\}$, $B' = \{1, T, T^2\}$;
(iv) $f : \mathbf{R}_{\leq 3}[T] \to \mathbf{R}_{\leq 2}[T]$ definita come in (iii), ma rispetto alle basi $B = \{1, T+1, T^2+T+1, T^3+T^2+T+1\}$, $B' = \{1, T, T^2\}$;
(v) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ data da $f(x, y, z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz)$, rispetto alle basi canoniche E_n di $\mathbf{R}^n$;
(vi) $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ data da $f(X) = AX$, dove A è una matrice $m \times n$, rispetto alle basi canoniche.

Esercizio 16.2 Si considerino le basi

$$B = \{b_1 = (0,1,1), b_2 = (1,0,1), b_3 = (1,1,0)\}$$
$$B' = \{b'_1 = (1,0,0), b'_2 = (1,1,0), b'_3 = (1,1,1)\}$$

(i) Sia $P = (x, y, z)$: calcolare $[P]_B$ e $[P]_{B'}$.
(ii) Calcolare $[P]_{B'}$ sapendo che P ha coordinate (a, b, c) rispetto a B.
(iii) Calcolare le coordinate canoniche di w sapendo che $[w]_B = (1, 1, 1)$.
(iv) Calcolare le coordinate canoniche di w sapendo che $[w]_B = (1, 1, 1)$.
(v) Scrivere la matrice del cambio di coordinate da B a B' e quella del cambio di coordinate da B' a B.

Esercizio 16.3 Si considerino i sistemi di riferimento affini (P_0, B) e (P'_0, B') di $\mathbf{R}^3$, dove B, B' sono come nell'esercizio precedente e

$$P_0 = (1,1,1), \quad P'_0 = (1,0,1)$$

(i) Calcolare le coordinate di $P = (a, b, c)$ rispetto ai due riferimenti.
(ii) Calcolare le coordinate canoniche del punto Q, sapendo che esso ha coordinate $(1, 2, 3)$ nel riferimento (P_0, B).
(iii) Sapendo che R ha coordinate $(3, 2, 1)$ nel riferimento (P_0, B), calcolarne le coordinate nel riferimento (P'_0, B').
(iv) Scrivere la formula che permette di passare dalle coordinate affini nel riferimento (P_0, B) a quelle nel riferimento (P'_0, B'), e viceversa.

Esercizio 16.4 Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, definita da $f(x, y) = (2x, 3x + y, x - y)$ e

$$B = \{b_1 = (1,1), b_2 = (1,-1)\}$$
$$B' = \{b'_1 = (2,0,0), b'_2 = (0,1,1), b'_3 = (0,1,2)\}$$

(i) si calcolino le matrici di cambio di base $[f]^{E_2}_{E_3}$, $[id]^B_{E_2}$, $[id]^{E_3}_{B'}$ e $[f]^B_{B'}$;
(ii) si calcolino le coordinate di $f(2, 1)$ e di $f(1, 2)$ rispetto a B'.
Ripetere l'esercizio per $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, definita da $f(x, y) = (2x + y + z, x - z)$, rispetto alle basi $B' = \{b'_1 = (-1, 1), b'_2 = (1, 1)\}$ e $B = \{b_1 = (1, 0, 2), b_2 = (0, 1, 1), b_3 = (0, 1, 2)\}$, e per i punti $f(2, 1, 1)$ e $f(1, 1, 2)$.

Esercizio 16.5 Sia $R_\vartheta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, la rotazione antioraria di centro l'origine ed angolo $\vartheta \in [0, 2\pi[$.
(i) Si calcoli $R_\vartheta(x, y)$ e la matrice $[R_\vartheta]_E^E$;
(ii) come si scrive, in coordinate canoniche, la rotazione antioraria di centro un punto C ed angolo $\vartheta \in [0, 2\pi[$?

Esercizio 16.6 Sia $S_\vartheta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, la riflessione rispetto alla retta r passante per l'origine e di vettore direzione $u = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$.
(i) Calcolare $S_\vartheta(x, y)$ e la matrice $[S_\vartheta]_E^E$;
(ii) come si scrive, in coordinate canoniche, la riflessione rispetto alla retta r' passante per un punto C e di vettore direzione $u = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$?

Esercizio 16.7 Sia $S_\pi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, la riflessione rispetto al piano
$$\pi : x - y + 2z = 0$$
(i) Calcolare $S_\pi(x, y, z)$ e la matrice $[S_\pi]_E^E$;
(ii) come si scrive, in coordinate canoniche, la riflessione rispetto al piano $\pi' : x - y + 2z = 1$?

Esercizio 16.8 Sia $S_r : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, la riflessione rispetto alla retta
$$r : x - y + 2z = x + y = 0$$
(i) Calcolare $S_r(x, y, z)$ e la matrice $[S_r]_E^E$;
(ii) come si scrive, in coordinate canoniche, la riflessione rispetto alla retta $r : x - y + 2z = x + y = 1$?

Esercizio 16.9 Sia r^+ la retta di $\mathbf{R}^3$ passante per l'origine ed orientata dal suo vettore direzione $u = (1, 1, 1)$ e si consideri la rotazione $R_{r^+,\vartheta} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$.
(i) Calcolare $R_{r^+,\vartheta}(x, y, z)$ e la matrice $[R_{r^+,\vartheta}]_E^E$;
(ii) come si scrive, in coordinate canoniche, la rotazione rispetto alla retta r'^+ parallela ad r^+, passante per $P_0 = (1, 0, 0)$ e orientata dallo stesso vettore direzione u?