

Corso di geometria (per fisici)

ANNO ACCADEMICO 2009/2010

CANALE C

Esercizi - Settimana 1 - Foglio B

Esercizio 1.1

Chiamiamo D la frase “esiste una ragazza maggiorenne” e d la frase “esiste una ragazza minorenni”. Similmente, siano U la frase “esiste un ragazzo maggiorenne” e u la frase “esista un ragazzo minorenni”.

Allora (A) equivale a $(U$ falsa e d falsa), mentre (B) equivale a $(U$ falsa e D vera).

Le otto frasi che seguono equivalgono a:

1. $(U$ vera e d vera)
2. $(u$ falsa oppure D falsa)
3. $(u$ falsa e D falsa)
4. $(u$ falsa $\implies d$ vera) che equivale anche a $(u$ vera oppure d vera)
5. $(U$ vera e d falsa)
6. $(u$ falsa e D vera)
7. $(u$ falsa oppure D vera)
8. $(U$ falsa $\implies D$ vera) che equivale anche a $(U$ vera oppure D vera)

La negazione di (A) equivale a $(U$ vera oppure d vera), e quindi all’asserzione (8). La negazione di (B) equivale a $(U$ vera oppure D falsa), e quindi non corrisponde a nessuna delle asserzioni precedenti.

Esercizio 1.2.

(i) $A = \{a, l, g, e, b, r\}$ $V = \{a, e\}$

- (ii) $\mathcal{D}^r(3, A) = \{aaa, aal, aag, aae, aab, aar, ala, all, alg, ale, alb, alr, aga, agl, agg, age, agb, agr, aea, ael, aeg, aee, aeb, aer, aba, abl, abg, abe, abb, abr, ara, arl, arg, are, arb, arr, laa, lal, \dots\}$
- (iii) $\mathcal{D}^{nr}(3, A) = \{alg, ale, alb, alr, agl, age, agb, agr, ael, aeg, aeb, aer, abl, abg, abe, abr, lag, lae, lab, lar, lga, lge, lgb, lgr, lea, leg, leb, ler, lba, lbg, lbe, lbr, \dots\}$
- (iv) $\mathcal{C}(3, A) = \{\{a, l, g\}, \{a, l, e\}, \{a, l, b\}, \{a, l, r\}, \{a, g, e\}, \{a, g, b\}, \{a, g, r\}, \{a, e, b\}, \{a, e, r\}, \{a, b, r\}, \{l, g, e\}, \{l, g, b\}, \{l, g, r\}, \{l, e, b\}, \{l, e, r\}, \{l, b, r\}, \{g, e, b\}, \{g, e, r\}, \{g, b, r\}, \{e, b, r\}\}$
- (iv) $\mathcal{M}_3[A] = \{a^3, a^2l, a^2g, a^2e, a^2b, a^2r, al^2, alg, ale, alb, alr, ag^2, \dots, l^3, l^2g, l^2e, l^2b, \dots\}$
- (v) $\mathbf{K}_3[A] = \{c_1M_1 + \dots + c_nM_n \mid c_i \in \mathbf{K}, M_i \in \mathcal{M}_3[A]\}$.

Assumiamo ora che A sia un insieme di n elementi. Allora $|\mathcal{D}^r(k, A)| = n^k$; $|\mathcal{D}^{nr}(k, A)| = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$ (quando $k \leq n$, oppure 0 se $k > n$); $|\mathcal{C}(k, A)| = \binom{n}{k}$ (se $k \leq n$ oppure 0 se $k > n$); $|\mathcal{M}_k[A]| = \binom{n+k-1}{k}$. $|\mathbf{R}_k[A]| = \infty$ se $\mathbf{R} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{R}$ è infinito. Se invece $|\mathbf{K}| = d$ (per esempio, $|\mathbb{Z}/p| = p$), allora $|\mathbf{K}_k[A]| = d^{|\mathcal{M}_k[A]|}$.

Esercizio 1.3.

- (i) $x \in A \setminus B \iff x \in A \subseteq X \text{ e } x \notin B \iff x \in A \text{ e } x \in B^c \iff x \in A \cap B^c$.
- (ii) $x \in (A \cap B)^c \iff x \in X \text{ e } x \notin A \cap B \iff x \in X \text{ e } (x \notin A \text{ oppure } x \notin B) \iff x \in A^c \text{ oppure } x \in B^c \iff x \in A^c \cup B^c$.
- (iii) $x \in (A \cup B)^c \iff x \in X \text{ e } x \notin A \cup B \iff x \in X \text{ e } x \notin A \text{ e } x \notin B \iff x \in A^c \text{ e } x \in B^c \iff x \in A^c \cap B^c$.
- (iv) $A \subset B \iff [\forall x \in A \ x \in B] \iff [\forall x \in X : x \notin B \ x \notin A] \iff [\forall x \in B^c \ x \in A^c] \iff B^c \subset A^c$.

Esercizio 1.4.

- (i) $f^{-1}(f(A)) \supset A$ è vera.
 Infatti, se $a \in A$, allora $b := f(a) \in f(A)$. Dato che $f(a) = b$, allora $a \in f^{-1}(b) \subset f^{-1}(f(A))$.

$f^{-1}(f(A)) \subset A$ non è sempre vera, e quindi $f^{-1}(f(A)) = A$ non è sempre vera.

Per esempio, nell'unica applicazione $f : \{0, 1\} \rightarrow \{2\}$, prendendo $A = \{0\}$, otteniamo $f(A) = \{2\}$ e $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{2\}) = \{0, 1\}$ che contiene A strettamente (ossia è diverso da A).

- (i) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ è vera.
 Infatti, $a \in f^{-1}(B)$ solo se $\exists b \in B$ tale che $f(a) = b$. Quindi $f(a) \in B$ per ogni $a \in f^{-1}(B)$.

$f(f^{-1}(B)) \supset B$ non è sempre vera, e quindi $f(f^{-1}(B)) = B$ non è sempre vera.

Per esempio, consideriamo l'applicazione $g : \{0\} \rightarrow \{1, 2\}$ tale che $g(0) = 1$ e prendiamo $B = \{2\}$. Allora $f^{-1}(B) = \emptyset$ e quindi $f(f^{-1}(B)) = \emptyset \neq B$.

Esercizio 1.5.

- (i) f non è iniettiva, perché $f(1) = f(-1)$.
 f non è suriettiva, perché non esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = -1$.
 f non è biiettiva e $f^{-1}(0) = \{0\}$.
- (ii) g è iniettiva perché, se $x < y$, allora $g(x) < g(y)$.
 g non è suriettiva, perché non esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 0$. Quindi g non è biiettiva e $g^{-1}(0) = \emptyset$.
- (iii) h non è iniettiva, perché $h(1) = h(0) = 0$, quindi h non è biiettiva.
 h è suriettiva, perché l'equazione $x^3 - x = y$ ha sempre una soluzione reale $\forall y \in \mathbb{R}$, per il teorema fondamentale dell'algebra.
 $f^{-1}(0) = \{0, 1, -1\}$ perché $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$.
- (vii) p non è iniettiva (e quindi non è biiettiva), perché $p(0) = 0 = p(2)$.
 p non è suriettiva perché $p(x)$ è sempre intero, e quindi non esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $p(x) = 1/2$.
 $p^{-1}(0) = 2\mathbb{Z} = \{2x \in \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

- (viii) $q : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ data da $q(x) = 2x + 1$ è iniettiva.
 Infatti, se $q(x) = q(y)$, allora $2x + 1 = 2y + 1$ e quindi $x = y$.
 q non è suriettiva, perché l'immagine di q consiste dei soli numeri dispari, e quindi non esiste x intero tale che $q(x) = 2$, per esempio. Dunque q non è biiettiva e $q^{-1}(0) = \emptyset$.
- (ix) $r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ data da $r(x) =$ somma delle cifre di x in base 10 non è iniettiva, perché $r(1) = 1 = r(10)$. Quindi r non è biiettiva.
 r è suriettiva, perché per ogni $m \in \mathbb{N}$ il numero $n = 1 + 10 + 100 + \dots + 10^m$ soddisfa $r(n) = m$.
 È chiaro che $r^{-1}(0) = \{0\}$.
- (x) $s : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ data da $s(x, y) = x/y$ non è iniettiva (e quindi non è biiettiva).
 Infatti, $s(1, 2) = s(2, 4)$.
 s è suriettiva, perché dato $q \in \mathbb{Q}$, q può essere scritto come $q = a/b$, per certi a, b interi e $b \neq 0$, e quindi $s(a, b) = q$.
 $s^{-1}(0) = \{(0, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid y \in \mathbb{Z}^*\}$.
- (xi) Analogo al caso precedente.
 $t : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ data da $t(x, y) = x/2y$ non è iniettiva (e quindi non è biiettiva).
 Infatti, $t(2, 1) = t(4, 2)$.
 t è suriettiva, perché dato $q \in \mathbb{Q}$, q può essere scritto come $q = a/b$, per certi a, b interi e $b \neq 0$, e quindi $t(2a, b) = q$.
 $t^{-1}(0) = \{(0, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid y \in \mathbb{Z}^*\}$.

Esercizio 1.6.

Notazione come nell'esercizio 1.5.

$f \circ g, g \circ f, h \circ f, f \circ h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hanno senso. Il loro dominio è \mathbb{R} e il loro codominio è \mathbb{R} .

$s \circ g$ non ha senso; mentre $g \circ s$ ha senso, considerando \mathbb{Q} come sottoinsieme di \mathbb{R} in modo canonico. Il dominio sarà $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e il codominio \mathbb{R} .

Similmente, $s \circ h$ non ha senso; mentre $h \circ s$ ha senso, considerando \mathbb{Q} come sottoinsieme di \mathbb{R} in modo canonico. Il dominio sarà $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e il codominio \mathbb{R} .

Esercizio 2.1.

$$\begin{aligned}4X^5 + 15X^4 - 16X^3 - 53X^2 - 18X + 8 &= p_1(X)(4X^2 + 15X - 4). \\X^5 + \frac{5}{2}X^4 - \frac{9}{2}X^3 - \frac{19}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + 3 &= p_1(X)(X^2 + \frac{5}{2}X - \frac{3}{2}). \\ \sqrt{2}X^5 + 2X^4 - 3\sqrt{2}X^3 - (6 + 2\sqrt{2})X^2 - 4X &= (\sqrt{2}X^2 + 2X)p_1(X). \\X^5 + iX^4 - X^3 - (2 + 3i)X^2 - (6 + 2i)X - 4 &= (X^2 + iX + 2)p_1(X).\end{aligned}$$

Esercizio 2.2.

$$\begin{aligned}\text{(i) } X^2 - X - 2 &= (X + 1)(X - 2) \\X^2 - 1 &= (X - 1)(X + 1) \\X^2 + 1 &= (X - i)(X + i) \\X^2 - 2iX - 1 &= (X - i)^2 \\4X^2 + 1 &= (2X - i)(2X + i) \\4X^2 - (2 - 2i)X - i &= (2X - 1)(2X + i)\end{aligned}$$

(iii) Abbiamo visto in classe il *Teorema fondamentale dell'algebra nella forma seguente*: se $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ non costante, allora esiste $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $p(\alpha) = 0$.

Ne abbiamo dedotto che, se il grado di p è d , allora esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{C}$ non necessariamente distinti e $c \in \mathbb{C}$ tali che $p(t) = c(t - \alpha_1)(t - \alpha_2) \cdots (t - \alpha_n)$.

Se raggruppiamo le radici, allora possiamo scrivere $p(t) = c(t - \beta_1)^{m_1} \cdots (t - \beta_k)^{m_k}$, dove $\{\beta_1, \dots, \beta_k\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $m_1, \dots, m_k > 0$ sono interi e $m_1 + \cdots + m_k = d$.

Esercizio 2.3.

(i) Visto a lezione.

(ii) La prima parte vista a lezione.

Per la seconda, $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ di grado 3 può avere 3 radici reali $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ (non necessariamente distinte) oppure 1 radice reale $r_1 \in \mathbb{R}$ e due radici complesse e coniugate $\beta_1, \bar{\beta}_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(iii) Dalla discussione precedente segue che un tale polinomio non può avere coefficienti reali. Tuttavia, il polinomio a coefficienti complessi $p(t) = (t - i)^3$ ha 3 radici coincidenti in i .

Esercizio 3.1.

- (i) $(\mathbb{N}, +)$ ha l'elemento neutro 0 ma non ha l'inverso, quindi non è un gruppo.
 $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ sono gruppi abeliani. L'elemento neutro è lo 0.
Su $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ l'operazione $+$ non è definita: infatti, $1 \in S^1$ ma $1 + 1 \notin S^1$. Quindi certamente $(S^1, +)$ non è un gruppo.
- (ii) $(\mathbb{N}^2, +)$ ha l'elemento neutro $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ma non ha l'inverso, quindi non è un gruppo.
Invece, $(\mathbb{Z}^2, +), (\mathbb{Q}^2, +), (\mathbb{R}^2, +), (\mathbb{C}^2, +)$ sono gruppi abeliani con elemento neutro $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- (iii) In (\mathbb{Z}, \cdot) e (\mathbb{Q}, \cdot) l'elemento neutro è 1 ma non c'è l'inverso di 0, quindi non sono gruppi.
 $(\mathbb{Q}^*, \cdot), (\mathbb{R}^*, \cdot), (\mathbb{C}^*, \cdot), (S^1, \cdot)$ sono gruppi abeliani con elemento neutro 1.
- (iv) In (\mathbb{Z}^2, \odot) e (\mathbb{Q}^2, \odot) l'elemento neutro è $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ma non c'è l'inverso di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, quindi non sono gruppi.
 $(\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*, \odot)$ e $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, \odot)$ sono gruppi abeliani con elemento neutro $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (v) La divisione non è definita su \mathbb{Z} e su \mathbb{Q} , perché non posso dividere per 0.
Su $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*, S^1$ è definita ma non è associativa. Per esempio, su \mathbb{Q}^* ho $4/(2/2) = 4/1 = 4$ ma $(4/2)/2 = 2/2 = 1$. Quindi questi non sono gruppi.
- (vi) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ non è un campo, perché non ci sono gli inversi di $+$ e \cdot .
 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ non è un campo, perché non ci sono gli inversi di \cdot .
 $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ sono campi (visto a lezione).

L'identificazione fra $(\mathbb{R}^2, +)$ e $(\mathbb{C}, +)$ è data da $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definita come $\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + iy$. Chiaramente, $\Phi \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right] = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = \Phi \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \Phi \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Tuttavia, Φ non rispetta i prodotti: infatti, se $x, y \in \mathbb{C}$ soddisfano $xy = 0$ allora $x = 0$ oppure $y = 0$. Invece, in \mathbb{R}^2 ho $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3.2.

Fatto quasi interamente in classe.

Visto che $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, moltiplicare $z \in \mathbb{C}$ per $1 + i$ vuol dire ruotare z di $\pi/4$ e allungarlo di un fattore $\sqrt{2}$.

Esercizio 3.3.

L'unico caso non coperto nell'esercizio 3.1 è $(\mathbb{Q}[\sqrt{n}], +, \cdot)$, che però è stato trattato a lezione. In effetti è un campo: l'unica cosa non ovvia da verificare è che esiste l'inverso moltiplicativo di un numero non nullo.

Dato $a + b\sqrt{b} \in \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ non nullo, allora

$$\frac{1}{a + b\sqrt{n}} = \frac{a - b\sqrt{n}}{(a + b\sqrt{n})(a - b\sqrt{n})} = \frac{a - b\sqrt{n}}{a^2 - nb^2} = \frac{a}{a^2 - nb^2} - \frac{b}{a^2 - nb^2}\sqrt{n}$$