

Corso di geometria (per fisici)

ANNO ACCADEMICO 2009/2010

Pseudo-esonero 2 - Soluzioni

Esercizio 1.

- (i) Sia $q(t) = (t^3 - 1)^2 = (t - 1)^2(t^2 + t + 1)^2$. Allora $q(M) = 0$ ci dice che $p_{min,M}(t)$ divide $q(t)$. Dato che $(t - 1)^2(t^2 + t + 1)^2$ è la fattorizzazione in irriducibili (su \mathbb{R}) di $q(t)$ e dato che $p_{min,M}(t)$ ha grado al massimo 4, allora $p_{min,M}(t)$ può essere $(t - 1)$, $(t - 1)^2$, $(t - 1)(t^2 + t + 1)$, $(t - 1)^2(t^2 + t + 1)$, $(t^2 + t + 1)^2$.

Invece il polinomio caratteristico $p_M(t) = t^4 - (\text{tr}(M))t^3 + a_2t^2 + a_1t + \det(M)$, che ha grado esattamente 4, può essere $(t - 1)^4 = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1$ (e allora $\text{tr}(M) = 4$), oppure $(t - 1)^2(t^2 + t + 1) = t^4 - t^3 - t + 1$ (e allora $\text{tr}(M) = 1$), oppure $(t^2 + t + 1)^2 = t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t + 1$ (e allora $\text{tr}(M) = -2$).

- (ii) L'unica possibilità è che $p_{min,M}(t) = (t - 1)^2$ e $p_M(t) = (t - 1)^4$. Dunque l'unico autovalore è $\lambda = 1$ e $m_{1,alg} = 4$, mentre $m_{1,geom}$ può essere 2 oppure 3.

Infatti, $m_{1,geom} = 4$ è escluso, perché altrimenti $M = I$. Supponiamo ora $m_{1,geom} = 1$ e $E_1 = \text{span}(v_1)$ e sia $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base di \mathbb{R}^4 . Notiamo che $(M - I)v_2, (M - I)v_3, (M - I)v_4 \in E_1$ e sono indipendenti, perché altrimenti esisterebbero $b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che $(M - I)(b_2v_2 + b_3v_3 + b_4v_4) = 0$ e quindi $b_2v_2 + b_3v_3 + b_4v_4 = b_1v_1$, il che è assurdo.

Questo argomento dimostra in generale che $\dim(\ker(f - \lambda I)^2) \leq 2\dim(\ker(f - \lambda I))$. L'argomento si può generalizzare per mostrare, per esempio, che $\dim(\ker(f - \lambda I)^3) \leq 2\dim(\ker(f - \lambda I)^2) - \dim(\ker(f - \lambda I))$.

Il caso $m_{1,geom} = 2$ è ottenuto nel modo seguente

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e il caso $m_{1,geom} = 3$ è ottenuto nel modo seguente

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.

Si ha $n_0 = 0$ (dunque b è degenera), $n_+ = 1$ e $n_- = 1$. In effetti, una base di Sylvester è data da $\mathcal{B} = \{q_1(t), q_2(t), q_3(t)\}$ con $q_1(t) = \sqrt{3/4}(1 + t)$,

$q_2(t) = \sqrt{3/4}(1-t)$, $q_3(t) = 5 - 3t^2$. È facile vedere che \mathcal{B} è ortogonale e che $b(q_1, q_1) = 1$, $b(q_2, q_2) = -1$ e $\text{Rad}(b) = \text{span}(q_3)$.

Esercizio 3.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo \mathbb{K} e siano $f, g : V \rightarrow V$ endomorfismi diagonalizzabili tali che $f \circ g = g \circ f$.

- (i) Sia $v \in E_\lambda(f)$, cosicché $f(v) = \lambda v$. Allora $f(g(v)) = g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$ e quindi $g(v) \in E_\lambda(f)$.
- (ii) Il punto precedente ci mostra che la restrizione $\tilde{g} := g|_{E_\lambda(f)} : E_\lambda(f) \rightarrow E_\lambda(f)$.
Come abbiamo visto in classe, $p_{\min, g}(\tilde{g}) = 0$ (perché \tilde{g} è la restrizione di g e $p_{\min, g}(g) = 0$) e dunque $p_{\min, \tilde{g}}$ divide $p_{\min, g}$.
Poiché g è diagonalizzabile, $p_{\min, g}$ è prodotto di fattori irriducibili di grado 1 e lo stesso vale per $p_{\min, \tilde{g}}$. Dunque \tilde{g} è diagonalizzabile.
- (iii) Se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono gli autovalori di f , abbiamo $V = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$.
Se $\tilde{g}_j : E_{\lambda_j} \rightarrow E_{\lambda_j}$ è la restrizione di g a E_{λ_j} , essa è diagonalizzabile per il punto precedente. Sia $\mathcal{B}_j = \{v_i^{(j)}\}$ una base di E_{λ_j} composta da autovettori di \tilde{g}_j . Chiaramente $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ è una base di V composta da vettori che sono simultaneamente autovettori di f e di g . Dunque $F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ e $F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g)$ sono entrambe diagonali.

Esercizio 4.

- (i) Chiaramente $\overline{(\overline{R^T R})}^T = \overline{R^T R}$ e quindi $\overline{R^T R}$ è hermitiana.
Inoltre, per ogni $v \in \mathbb{C}^n$ si ha $\overline{v^T R^T R v} = \overline{(Rv)^T (Rv)} \geq 0$. Dunque $\overline{R^T R}$ è semi-definita positiva.
- (ii) Per il teorema spettrale, esiste $U \in U(n)$ tale che $\overline{U}^T H U = D$, dove D è diagonale. Poiché H è semi-definita positiva, lo stesso vale per D e quindi la diagonale di D è fatta di numeri non negativi. Quindi esiste un'unica matrice diagonale che chiameremo \sqrt{D} , con entrate reali e non negative sulla diagonale, tale che $(\sqrt{D})^2 = D$.
Si ha $H = U D U^{-1} = U \sqrt{D} U^{-1} U \sqrt{D} U^{-1} = \overline{R^T} R = R^2$, dove $R = U \sqrt{D} U^{-1}$ e $\overline{R^T} = \overline{(U \sqrt{D} U^{-1})}^T = (\overline{U}^{-1})^T \overline{\sqrt{D}}^T \overline{U}^T = U \sqrt{D} U^{-1}$.
 H è congruente a D e dunque è semi-definita positiva.