Corso di geometria (per fisici)

Anno accademico 2009/2010

Pseudo-esonero 1 - Tempo: 2 ore

Esercizio 1.
Sia $Z \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale seguente

$$Z := \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; v_1 - 2v_2 + v_3 - v_4 = 0 \right\}$$

e sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $w = e_1 - e_4$.

Definire un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{rg}(f) = 2$, $W \subseteq \ker(f)$ e $\operatorname{Im}(f) \subseteq Z$ e scrivere la matrice che rappresenta f.

Esercizio 2.
Sia $W \subseteq \mathbb{C}^4$ il sottospazio generato da $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$, dove

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ -1+3i \end{pmatrix}, \; w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1+3i \\ 2+3i \end{pmatrix}$$

e sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio

$$U := \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} u_1 - (1+3i)u_2 - u_4 = 0 \\ u_1 + u_3 - 2u_4 = 0 \end{array} \right\}$$

Determinare una base di $U \cap W$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 3.
Sia $f = L_M : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ l'applicazione $\mathbb{K}$-lineare associata alla matrice $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dimostrare che M è simile ad una matrice triangolare superiore se e solo se esiste una catena di sottospazi

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{K}^n$$

tali che $\dim_{\mathbb{K}}(V_i) = i$ e $f(V_i) \subseteq V_i$.

Esercizio 4.
Sia $V = \mathbb{K}[t]_{\leq 2}$ e, per ogni $k \in \mathbb{K}$ sia $f_k : V \longrightarrow V$ l'applicazione definita come

$$f(p(t)) := p(t+1) + kt^2 p(1)$$

Verificare che f_k è $\mathbb{K}$-lineare e determinare la matrice $F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_k)$ che rappresenta f_k rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1 = 1, v_2 = -t, v_3 = 2 - t^2\}$ di V.

Dire per quali $k \in \mathbb{K}$ tale matrice è simile alla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$