

# Corso di geometria (per fisici)

ANNO ACCADEMICO 2009/2010

## Pseudo-esonero 1 - Soluzioni

### Esercizio 1.

Scegliamo  $v_1, v_2 \in Z$  in modo che  $\{v_1, v_2\}$  sia linearmente indipendente. Per esempio,  $v_1 = e_1 + e_4$  e  $v_2 = e_1 - e_3$ .

Prendiamo una base di  $\mathbb{R}^4$  che contenga  $w$ , per esempio la seguente  $\mathcal{B} = \{w, e_1, e_2, e_3\}$ . Definiamo  $f$  assegnandone i valori sulla base  $\mathcal{B}$ :  $f(w) = f(e_3) = 0$ ,  $f(e_1) = v_1$  e  $f(e_2) = v_2$ .

Chiaramente,  $\text{Im}(f) = \text{span}(v_1, v_2) \subset Z$  e quindi  $\text{rg}(f) = 2$ . Inoltre,  $W = \text{span}(w) \subset \ker(f)$ .

Poiché  $0 = f(w) = f(e_1 - e_4) = f(e_1) - f(e_4) = v_1 - f(e_4)$ , si ha  $f(e_4) = v_1$ . Dunque la matrice  $M$  che rappresenta  $f$  è del tipo  $M = (v_1|v_2|0|v_1)$ , ossia

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Esercizio 2.

Estraiamo da  $\mathcal{C}$  una base di  $W$ . Consideriamo l'applicazione lineare  $\Psi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4$  tale che  $\Psi(e_i) = w_i$  per  $i = 1, 2, 3$ . La sua matrice associata sarà

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1+i & -2 & 1+3i \\ 1 & -1+3i & 2+3i \end{pmatrix}$$

e  $\text{Im}(\Psi) = W$ . Una riduzione a scala di  $\Psi$  con Gauss-Jordan è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi  $\mathcal{D} := \{w_1, w_2\}$  è una base di  $W$  estratta da  $\mathcal{C}$ .

Consideriamo l'applicazione  $\Phi : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^2$  definita come

$$\Phi \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - (1+3i)u_2 - u_4 \\ u_1 + u_3 - 2u_4 \end{pmatrix}$$

cosicché  $U = \ker(\Phi)$  e  $W \cap U = W \cap \ker(\Phi)$ .

Se  $F_{\mathcal{D}} : \mathbb{C}^2 \rightarrow W$ , consideriamo la composizione  $M = \Phi \circ F_{\mathcal{D}} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ . Abbiamo  $W \cap U = F_{\mathcal{D}}(\ker(M))$  e una base di  $U \cap W$  è data da  $F_{\mathcal{D}}(\mathcal{B})$ , dove  $\mathcal{B}$  è una base di  $\ker(M)$ .

Poiché  $M = (\Phi(w_1)|\Phi(w_2))$ , abbiamo

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & -2-6i \end{pmatrix}$$

il cui nucleo è generato dal solo  $e_2 + (6 - 2i)e_1$ . Dunque,  $U \cap W$  ha dimensione 1 e base

$$F_{\mathcal{D}}(e_2 + (6 - 2i)e_1) = w_2 + (6 - 2i)w_1 = \begin{pmatrix} 4 - 2i \\ -1 \\ 6 + 4i \\ 5 + i \end{pmatrix}$$

### Esercizio 3.

Se  $M$  è simile ad una matrice triangolare superiore, allora esiste una base  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  tale che  $F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(M)$  è una matrice triangolare superiore. Questo vuol dire che, definiti

$$V_0 = \{0\} \subset V_1 = \text{span}(v_1) \subset V_2 = \text{span}(v_1, v_2) \subset \dots \subset V_n = \text{span}(v_1, \dots, v_n) = \mathbb{K}^n$$

si ha  $M(V_i) \subseteq V_i$ . Chiaramente,  $\dim_{\mathbb{K}}(V_i) = i$ .

Viceversa, data la catena di sottospazi, definiamo i vettori  $v_1, \dots, v_n$  per induzione su  $0 \leq k \leq n$ .

Asserzione  $T_k$ : per ogni  $0 \leq i \leq k$ ,  $\{v_1, \dots, v_i\}$  è una base di  $V_i$ .

Per  $k = 0$  l'asserzione è banalmente vera, perchè  $\emptyset$  è una base di  $V_0 = \{0\}$ .

Supponiamo  $T_k$  vera e  $k < n$ . Poichè  $V_{k+1} \supset V_k$  e  $\dim(V_{k+1}) = \dim(V_k) + 1$ , allora  $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$  è una base di  $V_{k+1}$ , dove  $v_{k+1}$  è un qualunque vettore in  $V_{k+1} \setminus V_k$ . È chiaro che tale base soddisfa l'ipotesi induttiva.

Sia  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  base di  $V_n = \mathbb{K}^n$ .

Poichè  $f(V_i) \subseteq V_i = \text{span}(v_1, \dots, v_i)$ , ne segue che  $F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  è triangolare superiore.

### Esercizio 4.

Per ogni  $p(t), q(t) \in \mathbb{K}[t]_{\leq 2}$ , si ha  $f_k(p(t) + q(t)) = (p + q)(t + 1) + kt^2(p + q)(1) = p(t + 1) + q(t + 1) + kt^2(p(1) + q(1)) = f_k(p(t)) + f_k(q(t))$ . Inoltre, per  $p(t) \in \mathbb{K}[t]_{\leq 2}$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ , si ha  $f_k(\lambda p(t)) = (\lambda p)(t + 1) + kt^2(\lambda p)(1) = \lambda p(t + 1) + \lambda kt^2 p(1) = \lambda f_k(p(t))$ . Quindi  $f_k$  è  $\mathbb{K}$ -lineare.

Abbiamo  $f(v_1) = 1 + kt^2 = (1 + 2k)v_1 - kv_3$ ,  $f(v_2) = (-1 - 2k)v_1 + v_2 + kv_3$  e  $f(v_3) = (2k - 1)v_1 + 2v_2 + (1 - k)v_3$ . Quindi

$$F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_k) = \begin{pmatrix} 1 + 2k & -1 - 2k & 2k - 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -k & k & 1 - k \end{pmatrix}.$$

Si ha  $\text{Tr}(F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_k)) = 2 + k$ , mentre  $\text{Tr}(M) = 3$ . Quindi, le due matrici non sono simili se  $k \neq 1$ . Tuttavia,  $\text{rg}(M) = 2$  mentre si può verificare con una riduzione a scala che

$$F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_1) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 3. Dunque, le due matrici non sono simili per nessun valore di  $k \in \mathbb{K}$ .