Corso di geometria (per fisici) - Canale C

Pseudo-esame 1 - Tempo: 2 ore

Esercizio 1.
Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi in t di grado al più 3 e sia $g : V \to V$ l'applicazione $\mathbb{R}$-lineare data da $g(p(t)) = t^3 p'(1/t)$.

(a) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base standard di V.

(b) Dire se g è diagonalizzabile/triangolabile. In caso affermativo, trovare una base di V che diagonalizza/triangola g.

Esercizio 2.

(a) Sia $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matrice a coefficienti in $\mathbb{C}$ e sia $q(t) \in \mathbb{C}[t]$ un polinomio. Dimostrare che, se $p_M(t) = (\lambda_1 - t) \cdot (\lambda_n - t)$, allora $p_{q(M)}(t) = (q(\lambda_1) - t) \cdots (q(\lambda_n) - t)$.

(b) Sia S una matrice simmetrica reale $n \times n$ e sia $q(t) \in \mathbb{R}[t]$ un polinomio di grado dispari. Dimostrare che esiste R simmetrica reale $n \times n$ tale che $q(R) = S$.

Esercizio 3.
Sia $M \in \mathrm{O}(4, \mathbb{R})$ una matrice ortogonale 4×4 tale che $\mathrm{tr}(M) = 3$.

(a) Determinare i possibili autovalori reali di M e le loro possibili molteplicità geometriche.

(b) Per quante matrici M si ha inoltre $Me_1 = e_1$ e $M(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3$?

(c) Determinare esplicitamente le matrici trovate al punto (b).