

Corso di geometria (per fisici) - Canale C

PSEUDO-ESAME 1 - SOLUZIONI

Esercizio 1.

(a) Se chiamiamo $\mathcal{C} = \{v_1 = 1, v_2 = t, v_3 = t^2, v_4 = t^3\}$ la base standard di V , si ha

$$F_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Il polinomio caratteristico di g è

$$p_g(t) = \det(g - tI) = t(t-2)(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})$$

che quindi si fattorizza completamente su \mathbb{R} e ha 4 radici distinte $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$. Dunque g è certamente diagonalizzabile.

Una base di E_0 è $\{v_1\}$.

Invece, una base di E_2 è $\{v_3\}$, una base di $E_{\sqrt{3}}$ è $\{\sqrt{2}v_2 + v_4\}$ e una base di $E_{-\sqrt{3}}$ è $\{\sqrt{2}v_2 - v_4\}$.

Dunque, una base che diagonalizza g è $\mathcal{B} = \{1, t^2, \sqrt{2}t + t^3, \sqrt{2}t - t^3\}$ e

$$F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.

(a) Sia $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ invertibile tale che $PMP^{-1} = T$ è triangolare superiore. Gli elementi sulla diagonale di T sono le radici di $p_T(t) = p_M(t)$, e dunque sono $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Gli elementi sulla diagonale di $q(T) = q(PMP^{-1}) = Pq(M)P^{-1}$ sono $q(\lambda_1), \dots, q(\lambda_n)$ e dunque $p_{q(T)}(t) = p_{q(M)}(t) = (q(\lambda_1) - t) \cdots (q(\lambda_n) - t)$.

(b) Per il teorema spettrale, esiste una matrice $P \in O(n, \mathbb{R})$ tale che $PSP^{-1} = D$ è diagonale, con $D_{ii} = \lambda_i \in \mathbb{R}$.

Poiché $q(t)$ ha grado dispari, allora la funzione polinomiale $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è suriettiva e quindi, per ogni $\lambda_i \in \mathbb{R}$, esiste $\mu_i \in \mathbb{R}$ tale che $q(\mu_i) = \lambda_i$.

Sia D' la matrice diagonale tale che $D'_{ii} = \mu_i$. Allora $q(D') = D$. Dunque $q(P^{-1}D'P) = P^{-1}q(D')P = P^{-1}DP = S$ e $P^{-1}D'P = P^T D' P$ è simmetrica reale: basta porre $R = P^{-1}D'P$.

Esercizio 3.

(a) Gli autovalori non reali compaiono a coppie coniugate, dunque si possono avere soltanto 0, 2 oppure 4 autovalori reali. Gli autovalori reali possono essere soltanto 1 oppure -1 . Poiché $\text{tr}(M) = 3$, non si possono avere 4 autovalori reali.

Il caso senza autovalori reali capita, per esempio

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

dove α è un angolo tale che $\cos(\alpha) = 3/4$.

Il caso con due autovalori reali capita (notiamo che le loro molteplicità algebriche e geometriche coincidono): la traccia di M in questo caso sarà $m_1 - m_{-1} + 2 \cos(\beta) = 3$. Poiché $|\cos(\beta)| \leq 1$, necessariamente $m_1 = 2$, $m_{-1} = 0$ e β è un angolo tale che $\cos(\beta) = 1/2$, ovvero $\beta = \pm\pi/3$, e la matrice M sarà simile/congruente a

$$\tilde{M}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

(b-c) Se prendiamo $v_1 = e_1$ e $v_2 = (e_2 + e_3)/\sqrt{2}$, allora $\{v_1, v_2\}$ è una base ortonormale di E_1 . Poiché M è ortogonale, allora $M(E_1^\perp) = E_1^\perp$. Sia $\{v_3, v_4\}$ una base ortonormale di E_1^\perp , per esempio $v_3 = (e_2 - e_3)/\sqrt{2}$ e $v_4 = e_4$, e sia infine $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Allora $F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(M) = (F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} \cdot M \cdot (F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})$ sarà uguale a $\tilde{M}_{\pi/3}$ oppure a $\tilde{M}_{-\pi/3}$. Dunque ci sono esattamente due possibilità.

Per determinare $M = (F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} \cdot \tilde{M}_{\pm\pi/3} \cdot (F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})$, ricordiamo che

$$F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e che $(F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} = (F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^T = F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.