

Esercizi di geometria per Fisica / Fisica e Astrofisica

Foglio 7 - 7 gennaio 2009

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z, w) = (y + z + w, x + z - w, x + y + 2z).$$

- (a) Verificare che l'applicazione f è lineare (si tratta quindi di un *omomorfismo*).
- (b) Determinare la matrice A associata ad f rispetto alle basi canoniche di \mathbf{R}^4 ed \mathbf{R}^3 .
- (c) Calcolare il rango di A , determinando un suo minore principale.
- (d) Determinare il nucleo di f , $\ker f$, verificando che è un sottospazio vettoriale di \mathbf{R}^4 .
- (e) Determinare l'immagine di f , $\text{Im } f$, verificando che è un sottospazio vettoriale di \mathbf{R}^3 .
- (f) Geometricamente, $\text{Im } f$ che cos'è? Scrivere le sue equazioni parametriche e cartesiane.
- (g) L'applicazione f è iniettiva? Suriettiva? Biunivoca?

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2x + z).$$

- (a) Verificare che l'applicazione f è lineare (si tratta quindi di un *endomorfismo*).
- (b) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di \mathbf{R}^3 .
- (c) Determinare i sottospazi $\text{Im}(f)$ e $\ker(f)$ di \mathbf{R}^3 . L'applicazione f è un isomorfismo?
- (d) Descrivere l'applicazione $f^2 = f \circ f$. Che relazione c'è tra la matrice associata ad f^2 rispetto alla base canonica e la matrice A ?
- (e) Descrivere l'applicazione f^{-1} , inversa di f . Che relazione c'è tra la matrice associata ad f^{-1} rispetto alla base canonica e la matrice A ?

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $f: \mathbf{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbf{R}_{\leq 2}[x]$ definita dalle tre condizioni

$$f(1) = x - 3, \quad x + 5 \in \ker f, \quad \text{il vettore } x^2 \text{ è fissato da } f.$$

Ricordiamo che

$$\mathbf{R}_{\leq 2}[x] = \{a + bx + cx^2 : a, b, c \in \mathbf{R}\}$$

è lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x di grado al più 2.

- (a) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ di $\mathbf{R}_{\leq 2}[x]$.
- (b) Determinare i sottospazi $\text{Im}(f)$ e $\ker(f)$ di $\mathbf{R}_{\leq 2}[x]$. L'applicazione f è un isomorfismo?

Esercizio 4. Sia $f: \mathbf{R}_{\leq 3}[x] \rightarrow \mathbf{R}_{\leq 3}[x]$ definita da $f(p(x)) = p(x + 1)$.

- (a) Si calcoli la matrice A associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ di $\mathbf{R}_{\leq 3}[x]$.
- (b) Usando la matrice A , si calcolino $f(2x + 3x^2)$, $f(x + x^3)$ ed $f(1 - x + x^2 - x^3)$.

Esercizio 5. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ i & k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$$

(dove i è l'unità immaginaria), dipendente dal parametro complesso $k \in \mathbf{C}$.

Sia $f: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ l'applicazione lineare associata ad A rispetto alla base canonica.

- (a) Scrivere le equazioni che descrivono l'applicazione lineare f .
- (b) Determinare, per ogni valore del parametro k , i sottospazi $\text{Im}(f)$ e $\ker(f)$ di \mathbf{C}^2 . Per quali valori di k l'applicazione lineare f è un isomorfismo?