Esercizi di geometria per Fisica / Fisica e Astrofisica

Foglio 7 - Soluzioni

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z, w) = (y + z + w, x + z - w, x + y + 2z).$$

(a) Verificare che l'applicazione f è lineare (si tratta quindi di un *omomorfismo*).

(b) Determinare la matrice A associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbf{R}^4$ ed $\mathbf{R}^3$.

(c) Calcolare il rango di A, determinando un suo minore principale.

(d) Determinare il nucleo di f, $\ker f$, verificando che è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$.

(e) Determinare l'immagine di f, $\operatorname{Im} f$, verificando che è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$.

(f) Geometricamente, $\operatorname{Im} f$ che cos'è? Scrivere le sue equazioni parametriche e cartesiane.

(g) L'applicazione f è iniettiva? Suriettiva? Biunivoca?

Soluzione. (a) Per ogni $(x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) \in \mathbf{R}^4$ si ha

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2)) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, w_1 + w_2) \\ &= ((y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) + (w_1 + w_2), \\ &\quad\ (x_1 + x_2) + (z_1 + z_2) - (w_1 + w_2), \\ &\quad\ (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2)) \\ &= (y_1 + z_1 + w_1, x_1 + z_1 - w_1, x_1 + y_1 + 2z_1) \\ &\qquad + (y_2 + z_2 + w_2, x_2 + z_2 - w_2, x_2 + y_2 + 2z_2) \\ &= f(x_1, y_1, z_1, w_1) + f(x_2, y_2, z_2, w_2). \end{aligned}$$

Per ogni $(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4$ e per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ si ha

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y, z, w)) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda w) \\ &= (\lambda y + \lambda z + \lambda w, \lambda x + \lambda z - \lambda w, \lambda x + \lambda y + 2\lambda z) \\ &= f(\lambda(y + z + w), \lambda(x + z - w), \lambda(x + y + 2z)) \\ &= \lambda f(y + z + w, x + z - w, x + y + 2z). \end{aligned}$$

Quindi f è un'applicazione lineare.

(b) Calcoliamo le immagini tramite f dei vettori della base caonnica di $\mathbf{R}^4$:

$$f(1, 0, 0, 0) = (0, 1, 1), \quad f(0, 1, 0, 0) = (1, 0, 1), \quad f(0, 0, 1, 0) = (1, 1, 2), \quad f(0, 0, 0, 1) = (1, -1, 0).$$

La matrice A ha per colonne le coordinate di tali vettori rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Le prime due righe di A sono linearmente indipendenti, mentre la terza è la somma delle prime due. Dunque il rango di A, massimo numero di righe linearmente indipendenti, è 2. Un suo minore principale è, ad esempio, quello individuato dalle prime due righe e dalle prime due colonne:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Il nucleo di f è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = O$, ovvero

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y + z + w = 0, \\ x + z - w = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

Abbiamo già calcolato il rango di A e individuato un suo minore principale. Dunque, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni, che si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = -z - w, \\ x = -z + w. \end{cases}$$

Se poniamo $z = -\lambda$ e $w = \mu$, si ottiene $x = \lambda + \mu$ e $y = \lambda - \mu$. Dunque la generica soluzione è

$$(\lambda + \mu, \lambda - \mu, -\lambda, \mu) = \lambda(1, 1, -1, 0) + \mu(1, -1, 0, 1).$$

Allora

$$\ker f = \{\lambda(1, 1, -1, 0) + \mu(1, -1, 0, 1) : \lambda, \mu \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Span}((1, 1, -1, 0), (1, -1, 0, 1)).$$

Si tratta dunque di un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 2 (un piano di $\mathbf{R}^4$).

(e) L'immagine di f è il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dalle colonne di A:

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Span}((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 2), (1, -1, 0)).$$

Poiché il rango di A vale 2 e un suo minore principale è individuato dalle prime due colonne di A, si ha che un insieme massimale di generatori di $\mathrm{Im}\, f$ è costituito dai primi due vettori:

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Span}((0, 1, 1), (1, 0, 1)).$$

Si tratta dunque di un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2.

(f) Il sottospazio $\mathrm{Im}\, f$ è un piano di $\mathbf{R}^3$. Le sue equazioni parametriche sono

$$\mathrm{Im}\, f \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \quad \text{ovvero,} \quad \mathrm{Im}\, f \colon \begin{cases} x = \mu, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda + \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}.$$

La sua equazione cartesiana si ottiene eliminando i parametri:

$$\mathrm{Im}\, f \colon z = x + y, \quad \text{ovvero} \quad \mathrm{Im}\, f \colon x + y - z = 0.$$

(g) L'applicazione f non è iniettiva, essendo $\ker f \neq \{(0, 0, 0, 0)\}$.

L'applicazione f non è suriettiva, essendo $\mathrm{Im}\, f \neq \mathbf{R}^3$.

Potevamo rispondere subito dopo il calcolo del rango $r = 2$ di A, osservando che f non è iniettiva perché $r \neq 4$ (dimensione dello spazio di partenza), ed f non è suriettiva perché $r \neq 3$ (dimensione dello spazio di arrivo).

Chiaramente, l'applicazione f non è biunivoca.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2x + z).$$

(a) Verificare che l'applicazione f è lineare (si tratta quindi di un *endomorfismo*).

(b) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

(c) Determinare i sottospazi $\mathrm{Im}(f)$ e $\ker(f)$ di $\mathbf{R}^3$. L'applicazione f è un isomorfismo?

(d) Descrivere l'applicazione $f^2 = f \circ f$. Che relazione c'è tra la matrice associata ad f^2 rispetto alla base canonica e la matrice A?

(e) Descrivere l'applicazione f^{-1}, inversa di f. Che relazione c'è tra la matrice associata ad f^{-1} rispetto alla base canonica e la matrice A?

Soluzione. **(a)** Per ogni $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbf{R}^3$, si ha

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2), 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2), \\ &\qquad 2(x_1 + x_2) + (z_1 + z_2)) \\ &= (x_1 + y_1 + z_1, 2y_1 + z_1, 2x_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2, 2y_2 + z_2, 2x_2 + z_2) \\ &= f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2). \end{aligned}$$

Per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ e per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, si ha

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y, z)) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x + \lambda y + \lambda z, 2\lambda y + \lambda z, 2\lambda x + \lambda z) \\ &= (\lambda(x + y + z), \lambda(2y + z), \lambda(2x + z)) = \lambda(x + y + z, 2y + z, 2x + z) = \lambda f(x, y, z). \end{aligned}$$

Queste due proprietà provano la linearità dell'applicazione f.

(b) Si ha $f(1, 0, 0) = (1, 0, 2)$, $f(0, 1, 0) = (1, 2, 0)$, $f(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$, quindi la matrice richiesta è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Determinare i sottospazi $\mathrm{Im}(f)$ e $\ker(f)$ di $\mathbf{R}^3$. L'applicazione f è un isomorfismo?

Il sottospazio $\mathrm{Im}(f)$ è lo spazio generato dalle colonne di A. Si ha $\det A = 2 + 2 - 4 = 0$, dunque $\mathrm{rg}\, A \leqslant 3$. In particolare $r = \mathrm{rg}\, A = 2$, con un minore principale individuato, ad esempio, dalle prime due righe e dalle prime due colonne. Dunque

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Span}((1, 0, 2), (1, 2, 0), (1, 1, 1)) = \mathrm{Span}((1, 0, 2), (1, 2, 0)) \\ &= \{\lambda(1, 0, 2) + \mu(1, 2, 0) : \lambda, \mu \in \mathbf{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 2x - y - z = 0\}. \end{aligned}$$

Si tratta del piano passante per l'origine e ortogonale al vettore $(2, -1, -1)$ (nell'ultima uguaglianza siamo passati dalla forma parametrica a quella cartesiana eliminando i parametri λ e μ).

Il sottospazio $\ker(f)$ è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poiché A ha rango 2, esistono ∞^1 soluzioni, che si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + y = -\lambda, \\ 2y = -\lambda, \\ z = \lambda. \end{cases}$$

Questo ha soluzione $(x, y, z) = (-\lambda/2, -\lambda/2, \lambda)$. Dunque

$$\ker(f) = \mathrm{Span}((-1/2, -1/2, 1)) = \mathrm{Span}((1, 1, -2)).$$

Si tratta della retta passante per l'origine che ha come vettore direttore $(1, 1, -2)$.

L'applicazione non è né iniettiva, essendo $\ker(f) \neq \{(0, 0, 0)\}$, né suriettiva, essendo $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbf{R}^3$ (in generale, se lo spazio di partenza e quello di arrivo hanno la stessa dimensione n, allora si ha: f iniettiva $\Leftrightarrow \mathrm{rg}\, A = n \Leftrightarrow f$ suriettiva). Quindi f non è biunivoca, cioè non è un isomorfismo.

(d) Per ogni vettore $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, si ha

$$\begin{aligned} f^2(x, y, z) &= (f \circ f)(x, y, z) = f[f(x, y, z)] = f(x + y + z, 2y + z, 2x + z) \\ &= ((x + y + z) + (2y + z) + (2x + z), 2(2y + z) + (2x + z), 2(x + y + z) + (2x + z)) \\ &= (3x + 3y + 3z, 2x + 4y + 3z, 4x + 2y + 3z). \end{aligned}$$

Si tratta di un'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ è

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Questa coincide con A^2, infatti

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(In generale, si ha che la matrice associata ad f^k è A^k per ogni k.)

(e) In generale, se f è un'applicazione invertibile con matrice associata A, allora esistono f^{-1} ed A^{-1} e la matrice associata ad f^{-1} è A^{-1}. In questo caso l'applicazione f non è invertibile, dunque non esiste f^{-1} e coerentemente la matrice A non è invertibile, dunque non esiste A^{-1}.

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbf{R}_{\leqslant 2}[x] \to \mathbf{R}_{\leqslant 2}[x]$ definita dalle tre condizioni

$$f(1) = x - 3, \quad x + 5 \in \ker f, \quad \text{il vettore } x^2 \text{ è fissato da } f.$$

Ricordiamo che

$$\mathbf{R}_{\leqslant 2}[x] = \{a + bx + cx^2 : a, b, c \in \mathbf{R}\}$$

è lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x di grado al più 2.

(a) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ di $\mathbf{R}_{\leqslant 2}[x]$.

(b) Determinare i sottospazi $\operatorname{Im}(f)$ e $\ker(f)$ di $\mathbf{R}_{\leqslant 2}[x]$. L'applicazione f è un isomorfismo?

Soluzione. (a) Calcoliamo le immagini tramite f dei polinomi della base $\mathcal{B}$. Si ha $f(1) = x - 3$ e $f(x^2) = x^2$. L'immagine di x la calcoliamo usando la linearità di f:

$$f(x) = f((x + 5) - 5) = f(x + 5) - 5f(1) = 0 - 5(x - 3) = -5x + 15.$$

Dunque, la matrice richiesta è

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 15 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Il sottospazio $\operatorname{Im}(f)$ è lo spazio generato dai vettori associati alle colonne di A. Si ha $\det A = 15 - 15 = 0$, dunque $\operatorname{rg} A \leqslant 3$. In particolare $r = \operatorname{rg} A = 2$, con un minore principale individuato, ad esempio, dalle righe 2 e 3 e dalle colonne 1 e 3. Dunque

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Span}(x - 3, 15 - 5x, x^2) = \operatorname{Span}(x - 3, x^2) \\ &= \{\lambda(x - 3) + \mu x^2 : \lambda, \mu \in \mathbf{R}\} = \{a + bx + cx^2 : a + 3b = 0\}. \end{aligned}$$

Il sottospazio $\ker(f)$ è l'insieme dei vettori le cui coordinate sono soluzioni del sistema omogeneo $AX = 0$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 15 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\ker(f) = \{a + bx + cx^2 : a - 5b = 0, c = 0\} = \{\lambda(5 + x) : \lambda \in \mathbf{R}\} = \operatorname{Span}(5 + x).$$

L'applicazione non è né iniettiva, essendo $\ker(f) \neq \{0\}$, né suriettiva, essendo $\operatorname{Im}(f) \neq \mathbf{R}^3$. Quindi f non è biunivoca, cioè non è un isomorfismo.

Esercizio 4. Sia $f\colon \mathbf{R}_{\leqslant 3}[x] \to \mathbf{R}_{\leqslant 3}[x]$ definita da $f(p(x)) = p(x + 1)$.

(a) Si calcoli la matrice A associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ di $\mathbf{R}_{\leqslant 3}[x]$.

(b) Usando la matrice A, si calcolino $f(2x + 3x^2)$, $f(x + x^3)$ ed $f(1 - x + x^2 - x^3)$.

Soluzione. (a) Si ha

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \\ f(x) &= x + 1, \\ f(x^2) &= (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1, \\ f(x^3) &= (x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1. \end{aligned}$$

Dunque la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(è interessante osservare che le sue colonne sono le prime quattro righe del triangolo di Tartaglia).

(b) Usando la matrice A, si calcolino $f(2x+3x^2)$, $f(x+x^3)$ ed $f(1-x+x^2-x^3)$.

Le coordinate di $2x+3x^2$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $(0,2,3,0)$. Dunuqe le coordinate della sua immagine sono date da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque $f(2x+3x^2) = 5+8x+3x^2$. Le altre due immagini si ottengono con i prodotti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Quindi $f(x+x^3) = 2+4x+3x^2+x^3$ e $f(1-x+x^2-x^3) = -2x-2x^2-x^3$.

Esercizio 5. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ i & k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$$

(dove i è l'unità immaginaria), dipendente dal parametro complesso $k \in \mathbf{C}$.

Sia $f\colon \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ l'applicazione lineare associata ad A rispetto alla base canonica.

(a) Scrivere le equazioni che descrivono l'applicazione lineare f.

(b) Determinare, per ogni valore del parametro k, i sottospazi $\mathrm{Im}(f)$ e $\ker(f)$ di $\mathbf{C}^2$.
Per quali valori di k l'applicazione lineare f è un isomorfismo?

Soluzione. (a) Se $\mathbf{v} = (x,y) \in \mathbf{C}^2$ e $\mathbf{w} = f(\mathbf{v}) = (x',y')$, si ha

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ i & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x' = x-2y, \\ y' = ix+ky. \end{cases}$$

(b) Per prima cosa, calcoliamo il determinante di A:

$$\det A = k+2i.$$

Dunque $\det A = 0$ se e solo se $k=-2i$.

Il sottosapzio $\mathrm{Im}(f)$ è generato dalle colonne di A, dunque

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}((1,i),(-2,k)) = \begin{cases} \mathbf{C}^2, & \text{se } k \neq -2i, \\ \mathrm{Span}((1,i)), & \text{se } k = -2i. \end{cases}$$

Il sottospazio $\ker(f)$ è l'insieme delle soluzioni di $AX=0$:

$$\ker(f) = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 : x-2y=0, ix+ky=0\} = \begin{cases} \{0,0\}, & \text{se } k \neq -2i, \\ \mathrm{Span}((2,1)), & \text{se } k = -2i. \end{cases}$$

Possiamo concludere che l'applicazione è un isomorfismo se e solo se $k \neq 2i$.