Esercizi di geometria per Fisica / Fisica e Astrofisica

Foglio 3 - 12 novembre 2008

Esercizio 1. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$ sono sottospazi vettoriali:

(a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

(b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z \leqslant 1\}$.

(c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$.

Esercizio 2. Si considerino i quattro vettori di $\mathbf{R}^4$

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, -1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 2), \quad \mathbf{v}_3 = (1, -1, 2, 1), \quad \mathbf{v}_4 = (0, 0, 2, 0)$$

e lo spazio da essi generato

$$\mathbf{W} = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4).$$

(a) Determinare $\dim \mathbf{W}$.

(b) Estrarre, dal sistema dei quattro generatori dati, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{W}$.

(c) Completare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{W}$ a una base di $\mathbf{R}^4$.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio vettoriale

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}_{\leqslant 3}[x] = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 : a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$$

dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x che hanno grado al più 3.

(a) Determinare una base e la dimensione di $\mathbf{V}$.

Stabilire se i seguenti sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$. Se lo sono, trovare una base e la dimensione.

(b) $S = \{p(x) \in \mathbf{V} : p(0) = 0\}$.

(c) $S = \{p(x) \in \mathbf{V} : p(1) = 1\}$.

(d) $S = \{p(x) \in \mathbf{V} : p(2) = p'(2)\}$ (dove $p'(x)$ è la derivata di $p(x)$, pensato come funzione di x).

Esercizio 4. Si considerino i vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1) \in \mathbf{R}^3$ e $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (0, 1, -2, 0) \in \mathbf{R}^4$.

(a) Estendere l'insieme $\{\mathbf{u}_1\}$ ad una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$.

(b) Normalizzare i vettori ottenuti nel punto **(a)** per ottenere una base ortonormale $\mathcal{B}$.

(c) Calcolare le coordinate del vettore $\mathbf{z} = (1, 0, 0) \in \mathbf{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(d) Calcolare le coordinate del generico vettore $\mathbf{z} = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(e) Estendere l'insieme $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ad una base ortogonale di $\mathbf{R}^4$.

(f) Normalizzare i vettori ottenuti nel punto **(e)** per ottenere una base ortonormale $\mathcal{B}'$.

(g) Calcolare le coordinate del vettore $\mathbf{w} = (1, 0, 0, 0) \in \mathbf{R}^4$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

(h) Calcolare le coordinate del generico vettore $\mathbf{w} = (a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$.