Esercizi di geometria per Fisica / Fisica e Astrofisica

Foglio 3 - Soluzioni

Esercizio 1. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$ sono sottospazi vettoriali:

(a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

(b) $T = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z \leqslant 1\}$.

(c) $U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$.

Soluzione. (a) Poiché S è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$ descritto da un'equazione lineare omogenea, possiamo già concludere che S è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ Infatti, in generale, un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$ è un sottospazio vettoriale se e solo se è descritto da un sistema di equazioni lineari omogenee.

Diamo però anche un'altra dimostrazione, sfruttando il risultato generale secondo cui un sottoinsieme di uno spazio vettoriale è un sottospazio vettoriale se e solo se è chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto per uno scalare.

Mostriamo che S è chiuso rispetto alla somma. Dati due vettori $\mathbf{v} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{w} = (x_2, y_2, z_2) \in S$, si ha $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, z_1 + z_2)$. Poiché $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in S$, si ha

$$x_1 + y_1 + z_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 + y_2 + z_2 = 0.$$

Ma allora

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) = 0,$$

e dunque

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, z_1 + z_2) \in S.$$

Mostriamo che S è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare. Dato un vettore $\mathbf{v} = (x, y, z) \in S$ e uno scalare $\lambda \in \mathbf{R}$, si ha $\lambda\mathbf{v} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. Poiché $\mathbf{v} \in S$, si ha $x + y + z = 0$. Ma allora

$$\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(x + y + z) = 0,$$

e dunque

$$\lambda\mathbf{v} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in S.$$

(b) $T = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z \leqslant 1\}$ non è uno spazio vettoriale, perché non è chiuso rispetto alla somma. Ad esempio, si ha $(1, 0, 0), (0, 1, 0) \in T$, ma $(1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0) \notin T$.

(c) L'unica terna di reali (x, y, z) per cui $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ è $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, quindi

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0\} = \{(0, 0, 0)\}.$$

Allora U è il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ costituito dal solo vettore nullo.

Esercizio 2. Si considerino i quattro vettori di $\mathbf{R}^4$

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, -1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 2), \quad \mathbf{v}_3 = (1, -1, 2, 1), \quad \mathbf{v}_4 = (0, 0, 2, 0)$$

e lo spazio da essi generato

$$\mathbf{W} = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4).$$

(a) Determinare $\dim \mathbf{W}$.

(b) Estrarre, dal sistema dei quattro generatori dati, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{W}$.

(c) Completare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{W}$ a una base di $\mathbf{R}^4$.

Soluzione. **(a)** Scriviamo i vettori come righe di una matrice 4×4:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La dimensione di $\mathbf{W}$ è uguale al rango di questa matrice. Calcoliamo il suo determinante, ad esempio applicando il metodo di Laplace lungo l'ultima riga:

$$\det A = -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -2(2-1-1) = 0.$$

Dunque $\mathrm{rg} A \leqslant 3$. D'altra parte, un minore di A di ordine 3 non singolare si trova facilmente, ad esempio eliminando la terza riga e la quarta colonna:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Infatti $\det R = -2 \neq 0$. Quindi $\mathrm{rg} A = 3$ e $\dim \mathbf{W} = 3$.

(b) Le righe che individuano il minore principale R (la prima, la seconda e la quarta) sono un insieme massimale di righe linearmente indipendenti. Dunque

$$\mathbf{W} = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4),$$

con $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_4$ linearmente indipendenti, dunque $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4)$ è una base di $\mathbf{W}$.

(c) Si tratta di scegliere (a piacere) un vettore $\mathbf{w} = (a, b, c, d)$ tale che i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_4$ e $\mathbf{w}$ siano linearmente indipendenti, ovvero in modo che la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

abbia determinante diverso da zero. Si può, ad esempio, scegliere $\mathbf{w} = \mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$ (quarto vettore della base canonica). Infatti si ha

$$\det B = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

Quindi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{e}_4)$ è una base di $\mathbf{R}^4$ che completa la base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4)$ di $\mathbf{W}$.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio vettoriale

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}_{\leqslant 3}[x] = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 : a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$$

dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x che hanno grado al più 3.

(a) Determinare una base e la dimensione di $\mathbf{V}$.

Stabilire se i seguenti sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{V}$. Se lo sono, trovare una base e la dimensione.

(b) $S = \{p(x) \in \mathbf{V} : p(0) = 0\}$.

(c) $T = \{p(x) \in \mathbf{V} : p(1) = 1\}$.

(d) $U = \{p(x) \in \mathbf{V} : p(2) = p'(2)\}$ (dove $p'(x)$ è la derivata di $p(x)$, pensato come funzione di x).

Soluzione. **(a)** $\mathbf{V}$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei polinomi 1, x, x^2 e x^3, dunque

$$\mathbf{V} = \mathrm{Span}(1, x, x^2, x^3).$$

Tali polinomi sono linearmente indipendenti, infatti l'unica combinazione lineare dei quattro polinomi che dia il polinomio nullo (vettore nullo di $\mathbf{V}$) è quella con tutti i coefficienti nulli:

$$a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ è il polinomio nullo} \quad \Leftrightarrow \quad (a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0).$$

Quindi i polinomi 1, x, x^2 e x^3 costituiscono una base di $\mathbf{V}$ e la sua dimensione è 4.

(b) Dato $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbf{V}$, la condizione $p(0) = 0$ equivale a $a = 0$. Dunque

$$S = \{p(x) = bx + cx^2 + dx^3 : b, c, d \in \mathbf{R}\}.$$

Si vede allora che $S = \mathrm{Span}(x, x^2, x^3)$ e dunque S è un sottospazio vettoriale di V. Inoltre, i tre polinomi x, x^2 e x^3 sono linearmente indipendenti:

$$bx + cx^2 + dx^3 \text{ è il polinomio nullo} \quad \Leftrightarrow \quad (b, c, d) = (0, 0, 0).$$

Quindi x, x^2 e x^3 costituiscono una base di S e la sua dimensione è 3.

(c) Il sottoinsieme T non è un sottospazio vettoriale, perché non contiene il polinomio nullo (vettore nullo di $\mathbf{V}$). Infatti per il polinomio nullo la condizione $p(1) = 1$ non è verificata (il polinomio nullo vale 0 per ogni valore dell'indeterminata).

(d) Dato $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, si ha $p'(x) = b + 2cx + 3dx^2$. Dunque

$$p(2) = a + 2b + 4c + 8d \quad \text{e} \quad p'(2) = b + 4c + 12d.$$

Allora la condizione $p(2) = p'(2)$ diventa

$$a + 2b + 4c + 8d = b + 4c + 12d, \quad \text{ovvero} \quad a + b - 4d = 0.$$

Quindi

$$U = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 : a + b - 4d = 0\}$$

Poiché la condizione che descrive i polinomi di U è un'equazione lineare omogenea, possiamo già concludere che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$. Per avere un'ulteriore conferma, e per determinarne una base e la dimensione, procediamo come segue. Esplicitiamo la condizione rispetto a un coefficiente (ad esempio a): $a = 4d - b$. Dunque, il generico polinomio di U ha la forma

$$p(x) = (4d - b) + bx + cx^2 + dx^3.$$

Raggruppando i coefficienti, otteniamo

$$p(x) = b(x - 1) + cx^2 + d(x^3 + 4).$$

Allora

$$U = \{p(x) = b(x - 1) + cx^2 + d(x^3 + 4) : b, c, d \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Span}(x - 1, x^2, x^3 + 4).$$

Quindi U è il sottospazio generato dai polinomi $x - 1$, x^2 e $x^3 + 4$. Mostriamo ora che tali polinomi sono linearmente indpendenti. Se imponiamo che la loro generica combinazione lineare

$$b(x - 1) + cx^2 + d(x^3 + 4) = (4d - b) + bx + cx^2 + dx^3$$

sia uguale al vettore nullo, otteniamo le condizioni

$$\begin{cases} 4d - b = 0, \\ b = 0, \\ c = 0, \\ d = 0 \end{cases}.$$

L'unica soluzione di questo sistema è $(b, c, d) = (0, 0, 0)$. Dunque i tre vettori sono linearmente indipendenti e costituiscono una base di U. Allora $\dim U = 3$.

Esercizio 4. Si considerino i vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1) \in \mathbf{R}^3$ e $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (0, 1, -2, 0) \in \mathbf{R}^4$.

(a) Estendere l'insieme $\{\mathbf{u}_1\}$ ad una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$.

(b) Normalizzare i vettori ottenuti nel punto **(a)** per ottenere una base ortonormale $\mathcal{B}$.

(c) Calcolare le coordinate del vettore $\mathbf{z} = (1, 0, 0) \in \mathbf{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(d) Calcolare le coordinate del generico vettore $\mathbf{z} = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(e) Estendere l'insieme $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ad una base ortogonale di $\mathbf{R}^4$.

(f) Normalizzare i vettori ottenuti nel punto **(e)** per ottenere una base ortonormale $\mathcal{B}'$.

(g) Calcolare le coordinate del vettore $\mathbf{w} = (1, 0, 0, 0) \in \mathbf{R}^4$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

(h) Calcolare le coordinate del generico vettore $\mathbf{w} = (a, b, c, d)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

Soluzione. (a) Un vettore $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ è ortogonale ad $\mathbf{u}_1$ se e solo se

$$(a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = a + b + c = 0$$

Quindi l'insieme dei vettori ortogonali ad $\mathbf{u}_1$, che si denota con $\mathbf{u}_1^\perp$, è

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1^\perp &= \{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 : a + b + c = 0\} = \{(a, b, -a - b) : a, b \in \mathbf{R}\} \\ &= \{a(1, 0, -1) + b(0, 1, -1) : a, b \in \mathbf{R}\} = \operatorname{Span}((1, 0, -1), (0, 1, -1)).\end{aligned}$$

Scegliamo uno di questi vettori, ad esempio ponendo $(a, b) = (1, 0)$. Si ottiene $\mathbf{u}_2 = (1, 0, -1)$, che è chiaramente indipendente da $\mathbf{u}_1$ e, per costruzione, ad esso ortogonale (in realtà si verifica in generale che se due vettori non nulli sono ortogonali, allora sono necessariamente indipendenti).

Ora un vettore $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ è ortogonale sia ad $\mathbf{u}_1$ che ad $\mathbf{u}_2$ se e solo se

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = 0, \\ (a, b, c) \cdot (1, 0, -1) = 0, \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} a + b + c = 0, \\ a - c = 0. \end{cases}$$

Questo è un sistema lineare omogeneo che ha ∞^1 soluzioni $(a, b, c) = (\lambda, -2\lambda, \lambda)$. Dunque l'insieme dei vettori contemporaneamente ortogonali ad $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ è

$$\mathbf{u}_1^\perp \cap \mathbf{u}_2^\perp = \{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 : a + b + c = 0, b = c\} = \{(\lambda, -2\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbf{R}\} = \operatorname{Span}((1, -2, 1)).$$

Possiamo allora scegliere $\mathbf{u}_3 = (1, -2, 1)$ e si ha che $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ è la base ortogonale richiesta.

(b) Per normalizzare un vettore è sufficiente dividerlo per la sua norma. Si ha

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_1\| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} &&\Rightarrow \quad \mathbf{u}_1' = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \\
\|\mathbf{u}_2\| &= \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} &&\Rightarrow \quad \mathbf{u}_2' = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\
\|\mathbf{u}_3\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6} &&\Rightarrow \quad \mathbf{u}_3' = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1) = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right).
\end{aligned}$$

La base $(\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2', \mathbf{u}_3')$ è la base ortonormale richiesta.

(c) Se poniamo $\mathbf{z} = (1, 0, 0) = x_1\mathbf{u}_1' + x_2\mathbf{u}_2' + x_3\mathbf{u}_3'$, otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \sqrt{3}, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(x_1, x_2, x_3) = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$. Queste sono quindi le coordinate.

(d) Generalizzando la soluzione del punto precedente, si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a\sqrt{3}, \\ x_1 - x_2 = b\sqrt{2}, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = c\sqrt{6}. \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione dalla terza, otteniamo $x_2 = -a\sqrt{3} + c\sqrt{6}$. Dalla seconda otteniamo $x_1 = x_2+b\sqrt{2} = -a\sqrt{3}+b\sqrt{2}+c\sqrt{6}$. Infine, sommando le prime due, abbiamo $2x_1+x_3 = a\sqrt{3}+b\sqrt{2}$, da cui $x_3 = a\sqrt{3} + b\sqrt{2} - 2x_1 = 3a\sqrt{3} - b\sqrt{2} - 2c\sqrt{6}$. Quindi le coordinate di $\mathbf{z} = (a, b, c)$ sono

$$(x_1, x_2, x_3) = (-a\sqrt{3} + b\sqrt{2} + c\sqrt{6}, -a\sqrt{3} + c\sqrt{6}, 3a\sqrt{3} - b\sqrt{2} - 2c\sqrt{6})$$

Si noti che la precedente relazione si può anche scrivere come segue

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\sqrt{3} \\ b\sqrt{2} \\ c\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

e infatti la matrice quadrata che compare nella precedente formula è l'inversa della matrice dei coefficienti del sistema lineare considerato (dalla teoria sappiamo che un sistema lineare $AX = B$, con A matrice quadrata invertibile, ha un'unica soluzione data da $X = A^{-1}B$).

(e) Osserviamo innanzitutto che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono ortogonali tra loro, essendo $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$.

Un vettore $(a, b, c, d)\mathbf{R}^4$ è ortogonale a $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, 1, -2, 0)$ se e solo se

$$\begin{cases} a + 2b + c + d = 0, \\ b - 2c = 0. \end{cases}$$

Questo sistema lineare omogeneo ha ∞^2 soluzioni, date da $(-5\lambda - \mu, 2\lambda, \lambda, \mu)$, dunque

$$\mathbf{v}_1^\perp \cap \mathbf{v}_2^\perp = \{\lambda(-5, 2, 1, 0) + \mu(-1, 0, 0, 1) : \lambda, \mu \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Span}((-5, 2, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)).$$

Se scegliamo, ad esempio, $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 0, 1)$, si ha che $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ sono indipendenti e ortogonali.

Un vettore $(a, b, c, d)\mathbf{R}^4$ è ortogonale a $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ se e solo se

$$\begin{cases} a + 2b + c + d = 0, \\ b - 2c = 0, \\ -a + d = 0. \end{cases}$$

Questo sistema lineare omogeneo ha ∞^1 soluzioni, date da $(5\lambda, -4\lambda, -2\lambda, 5\lambda)$, dunque

$$\mathbf{v}_1^\perp \cap \mathbf{v}_2^\perp \cap \mathbf{v}_3^\perp = \{\lambda(5, -4, -2, 5)\} = \mathrm{Span}((5, -4, -2, 5)).$$

Allora, se scegliamo $\mathbf{v}_4 = (5, -4, -2, 5)$, si ha che $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è la base ortogonale richiesta.

(f) Normalizziamo i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$. Si ha

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{7} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{v}_1' = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 2, 1, 1) = \left(\frac{\sqrt{7}}{7}, \frac{2\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{7}}{7}\right), \\
\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{5} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{v}_2' = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, -2, 0) = \left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right), \\
\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{3} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{v}_3' = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 0, 1) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
\|\mathbf{v}_4\| = \sqrt{70} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{v}_4' = \frac{\mathbf{v}_4}{\|\mathbf{v}_4\|} = \frac{1}{\sqrt{70}}(5, -4, -2, 5) = \left(\frac{\sqrt{70}}{14}, -\frac{2\sqrt{70}}{35}, -\frac{\sqrt{70}}{35}, \frac{\sqrt{70}}{14}\right).
\end{aligned}$$

La base $(\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2', \mathbf{v}_3', \mathbf{v}_4')$ è la base ortonormale richiesta.

(g) Se poniamo $\mathbf{z} = (1, 0, 0, 0) = x_1\mathbf{v}_1' + x_2\mathbf{v}_2' + x_3\mathbf{v}_3' + x_4\mathbf{v}_4'$, otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = \sqrt{7}, \\ x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0, \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1/\sqrt{7}\,) \cdot (3, 2, 1, -1)$.

Quindi le coordinate di $\mathbf{z} = (1,0,0,0)$ nella base $(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3, \mathbf{v}'_4)$ sono

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{3\sqrt{7}}{7}, \frac{2\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{7}}{7}, -\frac{\sqrt{7}}{7} \right).$$

(h) Generalizzando la soluzione del punto precedente, si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = a\sqrt{7}, \\ x_2 - 2x_3 = b\sqrt{5}, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = c\sqrt{2}, \\ 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 = d\sqrt{70}, \end{cases}$$

Questo sistema ha un'unica soluzione, data da

$$\begin{cases} x_1 = \left(\dfrac{3a\sqrt{7}}{7} + \dfrac{b\sqrt{5}}{5} - \dfrac{c\sqrt{2}}{2} + \dfrac{d\sqrt{70}}{70} \right), \\ x_2 = \left(\dfrac{2a\sqrt{7}}{7} + \dfrac{b\sqrt{5}}{5} - \dfrac{2d\sqrt{70}}{35} \right), \\ x_3 = \left(\dfrac{a\sqrt{7}}{7} - \dfrac{2b\sqrt{5}}{5} - \dfrac{d\sqrt{70}}{35} \right), \\ x_4 = \left(-\dfrac{a\sqrt{7}}{7} - \dfrac{b\sqrt{5}}{5} + \dfrac{c\sqrt{2}}{2} + \dfrac{9d\sqrt{70}}{70} \right). \end{cases}$$

Quindi queste sono le coordinate del generico vettore $\mathbf{w} = (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$ rispetto alla base $(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3, \mathbf{v}'_4)$. Si noti che l'ultima formula si può anche scrivere

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/7 & 1/5 & -1/2 & 1/70 \\ 2/7 & 1/5 & 0 & -2/35 \\ 1/7 & -2/5 & 0 & -1/35 \\ 1/7 & -1/5 & 1/2 & 9/70 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\sqrt{7} \\ b\sqrt{5} \\ c\sqrt{2} \\ d\sqrt{70} \end{pmatrix},$$

e infatti la matrice quadrata che compare nella precedente formula è l'inversa della matrice dei coefficienti del sistema lineare considerato.