Esercizi di geometria per Fisica / Fisica e Astrofisica

Foglio 2 - Soluzioni

Esercizio 1. Si considerino le seguenti matrici, dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ k & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & k & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per entrambe le matrici A e B, rispondere ai seguenti quesiti.

(a) Per quali valori di k la matrice è invertibile?

(b) Per tali valori di k, calcolare esplicitamente la matrice inversa.

(c) Per *ogni* valore di k, calcolare il rango della matrice.

Soluzione. (a) Una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero. Si ha

$$\det A = 4 - 2k + 2 - k + 2 - 8 = -3k \quad \text{e} \quad \det B = 2k + 2 + 0 - 0 + 1 - 0 = 2k + 3.$$

Dunque A è invertibile se e solo se $k \neq 0$ e B è invertibile se e solo se $k \neq -3/2$.

(b) In generale, se A è una matrice 3×3 non singolare, cioè tale che $\det A \neq 0$, si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

dove A^* è la *matrice aggiunta* di A, ovvero la trasposta della matrice che si ottiene sostituendo ad ogni elemento a_{ij} il suo complemento algebrico α_{ij}. Ricordiamo anche che il *complemento algebrico* α_{ij} di un elemento a_{ij} è dato da $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$, dove A_{ij} è la matrice ottenuta da A eliminando la riga i e la colonna j. Quanto detto si generalizza in modo ovvio a matrici quadrate di ordine superiore a 3. Nel nostro caso i complementi algebrici degli elementi di A sono

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6, \qquad \alpha_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ k & 4 \end{vmatrix} = -2(k+4), \quad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 2 - k,$$

$$\alpha_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad \alpha_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 4 \end{vmatrix} = 4 - k, \qquad \alpha_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = k - 1,$$

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3, \quad \alpha_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4, \qquad \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

dunque, per $k \neq 0$, la matrice inversa di A è

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{-3k} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -2(k+4) & 4-k & 4 \\ 2-k & k-1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{k} & \frac{1}{k} & \frac{1}{k} \\ \frac{2(k+4)}{3k} & \frac{k-4}{3k} & -\frac{4}{3k} \\ \frac{k-2}{3k} & \frac{1-k}{3k} & \frac{1}{3k} \end{pmatrix}.$$

I complementi algebrici degli elementi di B sono

$$\beta_{11} = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k + 1, \quad \beta_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \beta_{13} = \begin{vmatrix} 0 & k \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = k,$$

$$\beta_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4, \qquad \beta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \qquad \beta_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\beta_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ k & -1 \end{vmatrix} = -2, \qquad \beta_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \beta_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k,$$

dunque, per $k \neq -3/2$, la matrice inversa di B è

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} B^* = \frac{1}{2k+3} \begin{pmatrix} 2k+1 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ k & -3 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2k+1}{2k+3} & -\frac{4}{2k+3} & -\frac{2}{2k+3} \\ \frac{1}{2k+3} & \frac{2}{2k+3} & \frac{1}{2k+3} \\ \frac{k}{2k+3} & -\frac{3}{2k+3} & \frac{k}{2k+3} \end{pmatrix}.$$

(c) Per entrambe le matrici A e B vale lo stesso ragionamento: se la matrice è invertibile allora il suo rango è 3, altrimenti il rango è minore di 3, ma poichè esiste un minore di ordine 2 non singolare (in entrambi i casi, si vede ad occhio), il rango è 2. Riassumendo

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3, & \text{se } k \neq 0, \\ 2, & \text{se } k = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathrm{rg}(B) = \begin{cases} 3, & \text{se } k \neq 3/2, \\ 2, & \text{se } k = 3/2. \end{cases}$$

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ \frac{3}{2} & 2 & -\frac{11}{5} & \frac{32}{5} \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Verificare, con il metodo degli orlati, che $\mathrm{rg}(A) = 2$.

(b) Determinare, se esiste, una combinazione lineare delle righe di A non banale (cioè con coefficienti non tutti nulli) che dia il vettore nullo.

Soluzione. (a) Un minore di A di ordine 2 non singolare si ottiene, ad esempio, considerando la prima e la terza riga e le prime due colonne:

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Infatti $\det R_2 = 5 \neq 0$. Calcoliamo ora i determinanti dei minori di ordine 3 che orlano R_2 (ce ne sono due: la riga da aggiungere può essere solo la seconda, mentre la colonna da aggiungere può essere la terza o la quarta):

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ \frac{3}{2} & 2 & -\frac{11}{5} \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} = 4 + 0 - 15 - 0 + 11 - 0 = 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{32}{5} \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 0 + 30 - 0 - 32 - 0 = 0.$$

Poiché *tutti* i minori di A di ordine 3 che orlano R_2 sono singolari (cioè hanno determinante uguale a zero), per il teorema degli orlati si ha $\mathrm{rg}(A) = 2$ e un minore principale di A è R_2.

(b) Poiché $\mathrm{rg}(A) = 2$ sappiamo che le tre righe di A sono linearmente dipendenti. Dunque la combinazione lineare richiesta esiste. Potremmo porre

$$\alpha(1, 0, -2, 4) + \beta\left(\tfrac{3}{2}, 2, -\tfrac{11}{5}, \tfrac{32}{5}\right) + \gamma(0, 5, 2, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

e calcolare α, β e γ. Ma, più semplicemente, poniamo

$$\alpha(1, 0, -2, 4) + \beta(0, 5, 2, 1) = \left(\tfrac{3}{2}, 2, -\tfrac{11}{5}, \tfrac{32}{5}\right)$$

e calcoliamo α e β. Si ottiene

$$(\alpha, 5\beta, -2\alpha + 2\beta, 4\alpha + \beta) = \left(\tfrac{3}{2}, 2, -\tfrac{11}{5}, \tfrac{32}{5}\right),$$

ovvero

$$\begin{cases} \alpha = \frac{3}{2}, \\ 5\beta = 2, \\ -2\alpha + 2\beta = -\frac{11}{5}, \\ 4\alpha + \beta = \frac{32}{5}. \end{cases}$$

Questo sistema ammette la soluzione $(\alpha, \beta) = \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{5}\right)$ (sostituendo questi valori nelle ultime due equazioni si ottengono due identità). Dunque si ha

$$\tfrac{3}{2}(1, 0, -2, 4) + \tfrac{2}{5}(0, 5, 2, 1) = \left(\tfrac{3}{2}, 2, -\tfrac{11}{5}, \tfrac{32}{5}\right)$$

e la combinazione lineare richiesta è

$$\tfrac{3}{2}(1, 0, -2, 4) - \left(\tfrac{3}{2}, 2, -\tfrac{11}{5}, \tfrac{32}{5}\right) + \tfrac{2}{5}(0, 5, 2, 1) = (0, 0, 0, 0).$$

Esercizio 3. Si consideri il sistema di 3 equazioni in 4 incognite la cui matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -k & 0 & -k \\ k & 1 & 0 & -k & 0 \\ 1 & k & -1 & k & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Risolvere il sistema al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.

(b) Per quali valori di k l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?

(c) Per tali valori di k, determinare la dimensione e una base del sottospazio delle soluzioni.

Soluzione. (a) Scriviamo esplicitamente il sistema, usando come incognite x, y, z e w:

$$\begin{cases} x + ky - kz = -k, \\ kx + y - kw = 0, \\ x + ky - z + kw = 0. \end{cases}$$

Un minore di ordine 2 non singolare della matrice dei coefficienti A (e dunque anche della matrice completa C) si ottiene, ad esempio, scegliendo le righe 2 e 3 e le colonne 2 e 3:

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & -1 \end{pmatrix}.$$

Infatti $\det R_2 = -1 \neq 0$. Quindi $\operatorname{rg}(A) \geqslant 2$. Consideriamo ora un minore di ordine 3 che orla R_2. Aggiungiamo la prima riga e la quarta colonna:

$$R_3 = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ 1 & 0 & -k \\ k & -1 & k \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det R_3 = 0 + k^3 + 0 - 0 - k^2 + k^2 = k^3$. Possiamo allora distinguere due casi.

Se $k \neq 0$, si ha $\det R_3 \neq 0$, dunque $\operatorname{rg} A = 3$ e $\operatorname{rg} C = 3$. Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni. La variabile libera è quella corrispondente alla colonna di A fuori dal minore principale R_3, ovvero x. Allora poniamo $x = \lambda$ e il sistema diventa

$$\begin{cases} ky - kz = -k - \lambda, \\ y - kw = -k\lambda, \\ ky - z + kw = -\lambda. \end{cases}$$

Fissato $\lambda \in \mathbf{R}$, questo è un sistema quadrato nelle incognite y, z e w, la cui matrice dei coefficienti è $R = R_3$, non singolare. Per il teorema di Cramer, questo ammette una soluzione $(\bar{y}, \bar{z}, \bar{w})$, con

$$\bar{y} = \frac{\det R_y}{\det R}, \quad \bar{z} = \frac{\det R_z}{\det R} \quad \text{e} \quad \bar{w} = \frac{\det R_w}{\det R},$$

dove R_y (risp. R_z, R_w) è la matrice che si ottiene da R sostituendo la colonna dei coefficienti di y (risp. z, w) con la colonna dei termini noti. Dunque

$$\det R_y = \begin{vmatrix} -k-\lambda & -k & 0 \\ -k\lambda & 0 & -k \\ -\lambda & -1 & k \end{vmatrix} = -\lambda k^2 + k(k+\lambda) - \lambda k^3 = k^2 + \lambda k(1 - k - k^2)$$

$$\det R_z = \begin{vmatrix} k & -k-\lambda & 0 \\ 1 & -k\lambda & -k \\ k & -\lambda & k \end{vmatrix} = -\lambda k^3 + k^2(k+\lambda) - \lambda k^2 + k(k+\lambda) = k^2(k+1) + \lambda k(1-k^2),$$

$$\begin{aligned} \det R_w = \begin{vmatrix} k & -k & -k-\lambda \\ 1 & 0 & -k\lambda \\ k & -1 & -\lambda \end{vmatrix} &= \lambda k^3 + (k+\lambda) - \lambda k^2 - \lambda k = k + \lambda(1 - k - k^2 + k^3) = \\ &= k + \lambda(1-k)(1-k^2) = k + \lambda(k+1)(k-1)^2. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{k^2 + \lambda k(1-k-k^2)}{k^3} = \frac{1}{k} + \lambda\frac{1-k-k^2}{k^2}, \\ \bar{z} &= \frac{k^2(k+1) + \lambda k(1-k^2)}{k^3} = \frac{k+1}{k} + \lambda\frac{1-k^2}{k^2}, \\ \bar{w} &= \frac{k + \lambda(k+1)(k-1)^2}{k^3} = \frac{1}{k^2} + \lambda\frac{(k+1)(k-1)^2}{k^3}. \end{aligned}$$

Dunque, per $k \neq 0$, la generica soluzione del sistema è

$$\begin{aligned}(x, y, z, w) &= \left(\lambda, \frac{1}{k} + \lambda\frac{1-k-k^2}{k^2}, \frac{k+1}{k} + \lambda\frac{1-k^2}{k^2}, \frac{1}{k^2} + \lambda\frac{(k+1)(k-1)^2}{k^3}\right) \\ &= \left(0, \frac{1}{k}, \frac{k+1}{k}, \frac{1}{k^2}\right) + \lambda\left(1, \frac{1-k-k^2}{k^2}, \frac{1-k^2}{k^2}, \frac{(k+1)(k-1)^2}{k^3}\right)\end{aligned}$$

e l'insieme delle soluzioni è

$$\left\{\left(0, \frac{1}{k}, \frac{k+1}{k}, \frac{1}{k^2}\right) + \lambda\left(1, \frac{1-k-k^2}{k^2}, \frac{1-k^2}{k^2}, \frac{(k+1)(k-1)^2}{k^3}\right) : \lambda \in \mathbf{R}\right\}$$

(per ogni fissato k, si tratta di una retta di $\mathbf{R}^4$ passante per il punto $(0, 1/k, (k+1)/k, 1/k^2)$).

Se $k = 0$ la matrice e il sistema diventano, rispettivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ x - z = 0. \end{cases}$$

La generica soluzione è $(x, y, z, w) = (0, 0, 0, \lambda)$. Dunque l'insieme delle soluzioni è

$$\{\lambda(0, 0, 0, 1) : \lambda \in \mathbf{R}\}$$

(si tratta di una retta di $\mathbf{R}^4$ passante per l'origine, precisamente l'asse w).

(b) L'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo, e questo avviene se e solo se $k = 0$. Quanto visto nel quesito **(a)** dà un'ulteriore conferma di questo fatto.

(c) Se $k = 0$, l'insieme delle soluzioni è l'asse w dunque una sua base è costituita dal vettore $(0, 0, 0, 1)$ e la sua dimensione è 1.

Esercizio 4. Si consideri il sistema lineare omogoeneo

$$\begin{cases} ax + y = 0, \\ x + ay = 0, \\ bz + w = 0, \\ z + bw = 0 \end{cases}$$

nelle incognite x, y, z, w, dipendente dai parametri $a, b \in \mathbf{R}$.

(a) Risolvere il sistema per tutte le coppie $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

(b) Per quali valori di (a, b) l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$?

(c) Per tali valori di (a, b), determinare la dimensione e una base del sottospazio delle soluzioni.

(d) Disegnare nel piano ab il luogo delle coppie (a, b) per cui il sistema ha soluzioni non nulle.

Soluzione. (a) Si tratta di un sistema quadrato la cui matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il suo determinante, potremmo utilizzare il metodo di Laplace. Sfruttiamo invece questo risultato generale: il determinante di una matrice diagonale a blocchi è il prodotto dei determinanti dei suoi blocchi. Dunque

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} = (a^2 - 1)(b^2 - 1) = (a+1)(a-1)(b+1)(b-1).$$

Quindi la matrice A è invertibile se e solo se $a \neq \pm 1$ e $b \neq \pm 1$.

Se $a \neq \pm 1$ e $b \neq \pm 1$, per il teorema di Cramer il sistema ammette esattamente una soluzione e, essendo il sistema omogeneo, tale soluzione è necessariamente quella nulla. Invece, se $a = \pm 1$ oppure $b = \pm 1$, allora il rango di A è minore di 4 e ci sono anche soluzioni non nulle (*autosoluzioni*).

Osserviamo che in generale il sistema si spezza nei due sistemi indipendenti

$$\begin{cases} ax + y = 0, \\ x + ay = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} bz + w = 0, \\ z + bw = 0 \end{cases} .$$

Risolviamoli separatamente, concentrandoci sul primo sistema. Se $a \neq \pm 1$, allora il primo sistema ammette l'unica soluzione $(x, y) = (0, 0)$. Se $a = 1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x + y = 0, \end{cases}$$

che ha soluzioni $(x, y) = (\lambda, -\lambda) = \lambda(1, -1)$, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$. Infine, se $a = -1$, si ha

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ -x + y = 0, \end{cases}$$

che ha soluzioni $(x, y) = (\lambda, \lambda) = \lambda(1, 1)$, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$. Analogamente, per il secondo sistema l'insieme delle soluzioni è

$$\begin{cases} \{(z, w) = (0, 0)\}, & \text{se } b \neq \pm 1, \\ \{(z, w) = \mu(1, -1) : \mu \in \mathbf{R}\}, & \text{se } b = 1, \\ \{(z, w) = \mu(1, 1) : \mu \in \mathbf{R}\}, & \text{se } b = -1, \end{cases}$$

Mettendo insieme i risultati, per l'insieme delle soluzioni del sistema iniziale abbiamo nove casi:

$$\begin{cases} \{(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)\}, & \text{se } a \neq \pm 1 \text{ e } b \neq \pm 1, \\ \{(x, y, z, w) = \mu(0, 0, 1, -1) : \mu \in \mathbf{R}\}, & \text{se } a \neq \pm 1 \text{ e } b = 1, \\ \{(x, y, z, w) = \mu(0, 0, 1, 1) : \mu \in \mathbf{R}\}, & \text{se } a \neq \pm 1 \text{ e } b = -1, \\[1ex] \{(x, y, z, w) = \lambda(1, -1, 0, 0) : \lambda \in \mathbf{R}\}, & \text{se } a = 1 \text{ e } b \neq \pm 1, \\ \{(x, y, z, w) = \lambda(1, -1, 0, 0) + \mu(0, 0, 1, -1) : \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}, & \text{se } a = 1 \text{ e } b = 1, \\ \{(x, y, z, w) = \lambda(1, -1, 0, 0) + \mu(0, 0, 1, 1) : \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}, & \text{se } a = 1 \text{ e } b = -1, \\[1ex] \{(x, y, z, w) = \lambda(1, 1, 0, 0) : \lambda \in \mathbf{R}\}, & \text{se } a = -1 \text{ e } b \neq \pm 1, \\ \{(x, y, z, w) = \lambda(1, 1, 0, 0) + \mu(0, 0, 1, -1) : \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}, & \text{se } a = -1 \text{ e } b = 1, \\ \{(x, y, z, w) = \lambda(1, 1, 0, 0) + \mu(0, 0, 1, 1) : \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}, & \text{se } a = -1 \text{ e } b = -1, \end{cases}$$

(b) Essendo il sistema omogeneo, per ogni scelta dei parametri $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$.

(c) Riassumiamo i dati richiesti nella seguente tabella:

caso	base	dimensione
$a \neq \pm 1$ e $b \neq \pm 1$	$\emptyset$	0
$a \neq \pm 1$ e $b = 1$	$((0, 0, 1, -1))$	1
$a \neq \pm 1$ e $b = -1$	$((0, 0, 1, 1))$	1
$a = 1$ e $b \neq \pm 1$	$((1, -1, 0, 0))$	1
$a = 1$ e $b = 1$	$((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$	2
$a = 1$ e $b = -1$	$((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$	2
$a = -1$ e $b \neq \pm 1$	$((1, 1, 0, 0))$	1
$a = -1$ e $b = 1$	$((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$	2
$a = -1$ e $b = -1$	$((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$	2

(d) Abbiamo già osservato nella soluzione del quesito **(a)** che il sistema ammette soluzioni non nulle se e solo se $a = \pm 1$ oppure $b = \pm 1$. Nel piano ab il luogo di tali coppie è costituito dall'unione delle quattro rette di equazioni $a = -1$, $a = 1$, $b = -1$ e $b = 1$ (le prime due parallele all'asse a, le altre due parallele all'asse b).