Esercizi di geometria per Fisica / Fisica e Astrofisica

Foglio 1 - 15 ottobre 2008

Esercizio 1. Trovare $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ in modo che valga l'uguaglianza tra matrici

$$3\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 6 \\ -1 & 2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & a+b \\ c+d & 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Determinare matrici a gradini equivalenti per righe alle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema lineare omogeneo a gradini:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Determinare tutte le soluzioni del sistema.

Esercizio 4. Risolvere con il metodo di Gauss-Jordan il sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 1, \\ -z + 4w = 0, \\ x + 2y + 2w = 1, \\ z + w = 0. \end{cases}$$

Esercizio 5. **(a)** Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolare i prodotti righe per colonne AB e BA, verificando che $AB \neq BA$.

(b) Se A e B sono le matrici dell'esercizio 2, calcolare il prodotto che ha senso, tra AB e BA.

Esercizio 6. **(a)** Determinare la matrice

$$B = A^0 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4,$$

dove A è la matrice quadrata

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Prendendo spunto dallo sviluppo di Taylor della funzione esponenziale, si definisce l'*esponenziale* di una matrice quadrata nel seguente modo:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k = A^0 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \cdots.$$

Calcolare e^A, dove A è la matrice 3×3 data nel punto **(a)**.