Esercizi di geometria per Fisica / Fisica e Astrofisica

Foglio 1 - Soluzioni

Esercizio 1. Trovare $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ in modo che valga l'uguaglianza tra matrici

$$3\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 6 \\ -1 & 2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & a+b \\ c+d & 3 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Facendo i conti, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4 & a+b+6 \\ c+d-1 & 2d+3 \end{pmatrix}.$$

Le due matrici sono uguali se sono uguali elemento per elemento:

$$\begin{cases} 3a = a+4, \\ 3b = a+b+6 \\ 3c = c+d-1 \\ 3d = 2d+3, \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} 2a = 4, \\ 2b = a+6 \\ 2c = d-1 \\ d = 3. \end{cases}$$

Questo sistema ammette come unica soluzione

$$(a, b, c, d) = (2, 4, 1, 3),$$

dunque l'uguaglianza tra matrici vale se e solo se $a = 2$, $b = 4$, $c = 1$ e $d = 3$.

Esercizio 2. Determinare matrici a gradini equivalenti per righe alle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Effettuiamo trasformazioni elementari sulle righe, in modo da portare la matrice nella forma a gradini. Di volta in volta evidenziamo il *pivot* di riferimento.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Facciamo la stessa cosa a partire dalla matrice B:

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 \mapsto r_2 - 2r_1 \\ r_3 \mapsto r_3 + r_1 \\ r_4 \mapsto r_4 - 2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \mapsto r_4 + r_3/3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema lineare omogeneo a gradini:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Determinare tutte le soluzioni del sistema.

Soluzione. Il sistema è già nella forma a gradini. Riscriviamolo allineando le incognite:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 0, \\ \phantom{x_1 + {}} 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ \phantom{x_1 + 2x_2 - {}} x_3 - x_4 + x_5 &= 0. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema è

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

matrice a gradini in cui abbiamo messo in evidenza i *pivot* (primi elementi non nulli di ogni riga). In generale, le incognite corrispondenti alle colonne in cui non ci sono i pivot (in questo caso x_4 e x_5) sono le variabili libere, ovvero i parametri da cui dipenderanno le soluzioni del sistema.

Dunque poniamo $x_4 = \lambda$ e $x_5 = \mu$. Dall'ultima equazione otteniamo $x_3 = x_4 - x_5 = \lambda - \mu$, dalla seconda $2x_2 = x_3 - x_4 = \lambda - \mu - \lambda = \mu$, dunque $x_2 = -\mu/2$, e infine dalla prima otteniamo $x_1 = -x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = \mu/2 + \lambda - \mu - \lambda + \mu = \mu/2$. Quindi la generica soluzione è

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\mu/2, -\mu/2, \lambda - \mu, \lambda, \mu),$$

al variare di λ e μ in $\mathbf{R}$ (∞^2 soluzioni). È conveniente scrivere questa soluzione spezzando la parte che riguarda λ da quella che riguarda μ:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, \lambda, \lambda, 0) + (\mu/2, -\mu/2, -\mu, 0, \mu) = \lambda(0, 0, 1, 1, 0) + \mu(1/2, -1/2, -1, 0, 1).$$

In questo modo possiamo scrivere l'insieme delle soluzioni come

$$\mathcal{S} = \{\lambda(0, 0, 1, 1, 0) + \mu(1/2, -1/2, -1, 0, 1) : \lambda, \mu \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Span}((0, 0, 1, 1, 0), (1/2, -1/2, -1, 0, 1)).$$

(In generale, $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$ denota il *sottospazio generato* da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \mathbf{v}_m$, ovvero l'insieme di tutte le combinazioni lineari di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$.) Osserviamo che $\mathcal{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$ di dimensione 2. Geometricamente, si tratta di un piano di $\mathbf{R}^5$ passante per l'origine.

Esercizio 4. Risolvere con il metodo di Gauss-Jordan il sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 1, \\ -z + 4w = 0, \\ x + 2y + 2w = 1, \\ z + w = 0. \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Portiamola nella forma a gradini:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4 \mapsto r_4 + r_2]{r_3 \mapsto r_3 - 3r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4 \mapsto r_4 + 5r_3/14} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dunque il sistema iniziale è equivalente al seguente sistema a gradini:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 1, \\ -z + 4w = 0, \\ -14w = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

L'ultima equazione è un'identità, sempre verificata. L'unica colonna senza pivot è quella corrispondente all'incognita y, dunque y sarà l'unica variabile libera da cui dipenderà la soluzione. Poniamo $y = \lambda$. Dalla terza equazione otteniamo $w = 0$, dalla seconda $z = 4w = 0$ e dalla prima $x = 1 - 2y - 3z - 4w = 1 - 2\lambda$. Dunque la generica soluzione del sistema è

$$(x, y, z, w) = (1 - 2\lambda, \lambda, 0, 0) = (1, 0, 0, 0) + (-2\lambda, \lambda, 0, 0) = (1, 0, 0, 0) + \lambda(-2, 1, 0, 0),$$

al variare di λ in $\mathbf{R}$ (∞^1 soluzioni). Quindi l'insieme delle soluzioni è

$$\mathcal{S} = \{(1, 0, 0, 0) + \lambda(-2, 1, 0, 0) : \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Si tratta della retta di $\mathbf{R}^4$ passante per il punto $(1, 0, 0, 0)$ e avente la direzione del vettore $(-2, 1, 0, 0)$.

Esercizio 5. **(a)** Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolare i prodotti righe per colonne AB e BA, verificando che $AB \neq BA$.

(b) Se A e B sono le matrici dell'esercizio 2, calcolare il prodotto che ha senso, tra AB e BA.

Soluzione. **(a)** Si ha

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3+0+0 & -1+0-4 & 0+0+2 \\ 0+6+0 & 0+0+2 & 0-9-1 \\ 6-2+0 & -2+0+0 & 0+3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 6 & 2 & -10 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3+0+0 & 0+3+0 & -6-1+0 \\ -2+0+6 & 0+0+3 & 4+0+0 \\ 0+0-2 & 0-6-1 & 0+2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -7 \\ 4 & 3 & 4 \\ -2 & -7 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Evidentemente, $AB \neq BA$.

(b) Ricordiamo che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il prodotto BA non ha senso perché B ha 4 colonne mentre A ha 3 righe. Invece il prodotto AB ha senso perché A ha 4 colonne, tante quante le righe di B. Si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 2 \\ -3 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. **(a)** Determinare la matrice

$$B = A^0 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4,$$

dove A è la matrice quadrata

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Prendendo spunto dallo sviluppo di Taylor della funzione esponenziale, si definisce l'*esponenziale* di una matrice quadrata nel seguente modo:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k = A^0 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \cdots .$$

Calcolare e^A, dove A è la matrice 3×3 data nel punto **(a)**.

Soluzione. **(a)** La matrice A^0 è l'elemento neutro rispetto al prodotto righe per colonne, ovvero la matrice identità:

$$A^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le potenze successive di A valgono

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque anche $A^4 = A \cdot A^3$ è la matrice nulla di ordine 3. Allora si ha

$$B = A^0 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 + \frac{1}{2}(-2) \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) In realtà, per ogni $k \geqslant 3$ la potenza A^k è la matrice nulla di ordine 3, essendo $A^k = A^{k-3} \cdot A^3$ ed essendo A^3 nulla. Dunque

$$e^A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$