Corso di geometria (per fisici) - Canale C

Giovedì 28 gennaio 2009

Esonero 2 - Fila A - Soluzioni

Fila A - Esercizio 1.

Sia $q(t) = t^6 - 1$. Poiché $q(M) = 0$, il polinomio minimo $p_{M,min}(t)$ divide $q(t) = (t-1)(t+1)(t^2+t+1)(t^2-t+1)$. Dunque le radici di $p_{M,min}(t)$ e del polinomio caratteristico $p_M(t)$ sono radici seste dell'unità.

Sia $\eta = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, cosicché $\{1, \eta, \eta^2 = \overline{\eta}, -1, -\eta, -\eta^2 = -\overline{\eta}\}$ sono le radici seste di 1. Affinché $\mathrm{tr}(M) = 1$, dobbiamo scegliere 5 radici seste dell'unità (eventualmente ripetute). Poiché M è reale, per ogni radice non reale, dobbiamo avere anche la sua coniugata.

Le uniche possibilità sono $(1, 1, 1, -1, -1)$, $(\eta, \eta, \overline{\eta}, \overline{\eta}, -1)$ e $(\eta, -\eta, \overline{\eta}, -\overline{\eta}, 1)$. Nel primo caso otteniamo $p_M(t) = (1-t)^3(1+t)^2$; nel secondo caso, $p_M(t) = -(1+t)(t^2-t+1)^2$; nel terzo caso, $p_M(t) = (1-t)(t^2-t+1)(t^2+t+1)$.

Fila A - Esercizio 2.

(a) I determinanti dei minori principali sono $m_1 = 1$, $m_2 = r-4$ e $m_3 = r(r-5)$.

Se $r > 5$, tutti sono positivi e dunque b_r è definito positivo (ossia $n_+ = 3$, $n_- = 0$, $n_0 = 0$).

Se $r = 5$, allora $m_3 = 0$ e dunque $n_0 > 0$; inoltre, $m_1, m_2 > 0$ e dunque $n_+ \geq 2$. Si ha quindi $n_+ = 2$, $n_0 = 1$ e $n_- = 0$.

Se $0 < r < 5$, allora $m_3 < 0$. Dunque $n_0 = 0$ e n_- è dispari. Perciò $n_- = 1$ e $n_+ = 2$.

Se $r = 0$, $m_1 > 0$ (e dunque $n_+ \geq 1$), $m_2 < 0$ (e dunque $n_- > 0$) e $m_3 = 0$ (e dunque $n_0 > 0$). Concludiamo che $n_+ = n_- = n_0 = 1$.

Infine, se $r < 0$, $m_3 > 0$ e dunque $n_0 = 0$ e n_- è pari. Tuttavia, $m_2 < 0$ e dunque $n_- > 0$. Concludiamo che $n_- = 2$ e $n_+ = 1$.

(b) Nel caso $r = 0$ abbiamo $n_0 = n_+ = n_- = 1$. Il nucleo $V_0 = \mathrm{Rad}(b_0)$ di L_{b_0} è generato da $v_3 := e_2 - 2e_3$. Poiché $b_0(e_1, e_1) = 1$, possiamo prendere $v_1 := e_1$, che genera V_+.

Ora, si calcola facilmente che

$$v_1^\perp = \{w = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \,|\, a_1 + 2a_3 + a_3 = 0\}$$

e chiaramente la restrizione di b_0 a $v_1^\perp$ è semi-definito negativo. Dunque, per trovare un generatore di V_-, basta prendere un vettore in $v_1^\perp$ che non sia in V_0. Per esempio, $v_2 = 2e_1 - e_2$. In effetti, $b_0(v_2, v_2) = -4$.

Quindi una base di Sylvester è data da $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$, dove $w_1 = v_1 = e_1$, $w_2 = v_2/2 = e_1 - e_2/2$ e $w_3 = v_3 = e_2 - 2e_3$.

Fila A - Esercizio 3.

Il polinomio caratteristico di N_s è

$$p_{N_s}(t) = \det(N_s - tI) = (2-t)[(3-t)^2 - s] = (2-t)(t-3+\sqrt{s})(t-3-\sqrt{s})$$

Dunque N_s è triangolabile se e solo se $s \geq 0$.

Inoltre, se $s > 0$ e $s \neq 1$, allora $p_{N_s}(t)$ ha 3 radici distinte, e dunque N_s è diagonalizzabile.

Se $s = 0$, si ha $N_0 - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e dunque $m_{3,geom}(N_0) = \dim(E_3(N_0)) = \dim(\ker(N_0 - 3I)) = 1 < m_{3,alg}(N_0) = 2$ (perché $p_{N_0}(t) = (2-t)(3-t)^2$). Quindi N_0 non è diagonalizzabile.

Se $s = 1$, si ha $p_{N_1}(t) = (2-t)^2(4-t)$ e $N_1 - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e dunque $m_{2,geom}(N_1) = 2 = m_{2,alg}(N_1)$. Chiaramente, $m_{4,geom}(N_1) = m_{4,alg}(N_1) = 1$. Dunque, N_1 è diagonalizzabile.

Fila A - Esercizio 4.

Sia $V = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale reale delle matrici simmetriche 2×2 reali e sia $b : V \times V \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito da $b(M, N) := \mathrm{tr}(MN)$.

(a) Si ha $b(E_{i,j}, E_{k,l}) = \delta_{j,k}\delta_{i,l}$, quindi

$$F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) b è non degenere, dunque Φ^* esiste ed è unica. Si ha necessariamente

$$\mathrm{tr}((XM + MX^T)N) = b(\Phi(M), N) = b(M, \Phi^*(N)) = \mathrm{tr}(M\Phi^*(N))$$

Ora, $\mathrm{tr}((XM+MX^T)N) = \mathrm{tr}(XMN+MX^TN) = \mathrm{tr}(MNX+MX^TN) = \mathrm{tr}(M(NX + X^TN))$. Poiché questo vale per ogni M e b è non degenere, si ha $\Phi^*(N) = NX + X^TN$.