Corso di geometria (per fisici)

Anno accademico 2009/2010

Esercizi - Foglio 9

Gruppo 1.
Esercizi 14.1-14.2-14.3-14.6-14.11-14.13-14.16-14.17 del libro di esercizi.

Gruppo 2.

Esercizio 1.
Sia $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici reali $n \times n$ e consideriamo le applicazioni

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})^* \\ A &\longmapsto \varphi_A\end{aligned}$$

dove $\varphi_A(B) = \mathrm{tr}(AB)$ e

$$\begin{aligned}\Psi : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})^* \\ A &\longmapsto \psi_A\end{aligned}$$

dove $\psi_A(B) = \mathrm{tr}(A^T BA)$.

(a) Dire se Φ è $\mathbb{R}$-lineare. Se sì, dire se Φ è iniettiva/suriettiva/invertibile.

(b) Dire se Ψ è $\mathbb{R}$-lineare. Se sì, dire se Ψ è iniettiva/suriettiva/invertibile.

Esercizio 2.
Sia $V = V_1 \oplus V_2$ una somma diretta di spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, dove $\dim_{\mathbb{K}}(V_k) = d_k$. Sia inoltre $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di dimensione s e chiamiamo $r_k = \dim_K(V_k \cap W)$.

(a) Dimostrare che è ben l'applicazione $\mathbb{K}$-lineare

$$F : (V_1/(W \cap V_1)) \times (V_2/(W \cap V_2)) \longrightarrow V/W$$

data da $F([v_1], [v_2]) = [v_1 + v_2]$ è ben definita.
(Potevamo anche scrivere $F(v_1 + W \cap V_1, v_2 + W \cap V_2) = v_1 + v_2 + W$.)

(b) Determinare nucleo e immagine di F e calcolare le loro dimensioni.

(c) Siano ora $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 4}$, $V_1 = \mathrm{span}\{1, t^2, t^4\}$, $V_2 = \mathrm{span}\{t, t^3\}$ e $W = \mathrm{Ann}(\phi_1, \phi_2)$, dove $\phi_1(p(t)) = p'(1)$ e $\phi_2(p(t)) = p''(0)$. Calcolare una base del nucleo e dell'immagine di F (e le loro dimensioni).